

Tema 3: Fraccions algèbriques.

3.1. Fraccions algèbriques.

En molts problemes apareixen sovint fraccions en les quals el numerador o el denominador o tots dos alhora són polinomis. Aquestes fraccions les coneixem amb el nom de **fraccions algèbriques**.

Per exemple: És una fracció algèbrica l'expressió $\frac{3x^2 - 2x + 5}{x^3 - 2x^2 - 7x + 1}$.

Recorda que dues fraccions aritmètiques $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són equivalents si es verificava: $a \cdot d = b \cdot c$.

Així tenim que $\frac{2}{3}$ i $\frac{10}{15}$ són equivalents. En fraccions algèbriques l'equivalència és defineix

de forma semblant, així doncs, tenim: "Diem que dues fraccions algèbriques $\frac{a(x)}{b(x)}$ i $\frac{c(x)}{d(x)}$

són **equivalents** si es verificava: $a(x) \cdot d(x) = b(x) \cdot c(x)$ ".

Per exemple: Les fraccions algèbriques $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ i $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ són equivalents, ja que es verifica: $(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 4)$.

Algunes propietats de les fraccions algèbriques són:

- 1) Tota fracció algèbrica es equivalent a la que resulta de multiplicar numerador i denominador per un mateix polinomi.
- 2) Tota fracció algèbrica és equivalent a la que resulta de dividir numerador i denominador per un mateix polinomi.

El procediment emprat en trobar la fracció equivalent resultant de dividir numerador i denominador per un mateix polinomi s'anomena **simplificació**.

Per exemple:

- 1) En la fracció algèbrica $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$ podem dividir numerador i denominador per $x+2$ obtenint com a fracció equivalent $\frac{x-2}{x+2}$.

- 2) Si volem simplificar la fracció algèbrica $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$, podem descompondre factorialment els dos polinomis i després simplificar els factors comuns. Així doncs,

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

aplicant la regla de Ruffini, la descomposició factorial del numerador i del denominador és:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3) \quad \text{i} \quad x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$$

d'on tenim:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 3)}{(x - 2) \cdot (x^2 + 4)} = \frac{x + 3}{x^2 + 4}$$

Activitat 3.1.

Simplifica les següents fracció algèbrica:

a) $\frac{2x \cdot (x - 1)}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$

d) $\frac{x^4 - x^2}{x^2 - 3x}$

e) $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 3x}$

f) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$

Recorda que per reduir a comú denominador dues fraccions aritmètiques, buscàvem el m.c.m. del numerador i del denominador que seria el denominador comú més petit. Ara bé, després calia buscar els nous numeradors per tal que les noves fraccions fossin equivalents a les primeres. Així per exemple, tenim que les fraccions equivalents a $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}$ amb el més petit denominador comú són $\frac{9}{24}$ i $\frac{10}{24}$, ja que $\text{m.c.m.}(8,12) = 24$. De forma equivalent actuarem per **reduir dues fraccions algèbriques a comú denominador**.

Per exemple: Les fraccions equivalents a $\frac{3x - 4}{x^2 + 5x + 6}$ i $\frac{5x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ amb el més petit

denominador comú serien: $\frac{(3x - 4) \cdot (x + 1)}{(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)}$ i $\frac{(5x - 2) \cdot (x + 3)}{(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)}$, és a dir

$$\frac{3x^2 - x - 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \quad \text{i} \quad \frac{5x^2 + 13x - 6}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6},$$

ja que el $\text{m.c.m.}[x^2 + 5x + 6, x^2 + 3x + 2] = (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 1) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Activitat 3.2.

Redueix les següents fracció algèbrica al més petit denominador comú:

a) $\frac{2x - 1}{x^2 - 1}$ i $\frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$.

b) $\frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$ i $\frac{x^3 - x}{x^2 + 5x + 6}$

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

3.2. Operacions amb fraccions algèbriques.

3.2.1. Suma de fraccions.

Per sumar dues fraccions algèbriques cal reduir al més petit comú denominador aquestes fraccions per després sumar els numeradors i posar com a denominador el denominador comú. Caldrà simplificar el resultat, sempre que es pugui.

Per exemple:

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{x^2-2x+1} + \frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{x-5}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} = \\ &= \frac{(x^2-4x-5)+(x^2+x-2)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{2x^2-3x-7}{x^3-x^2-x+1}.\end{aligned}$$

Activitat 3.3.

Calcula les següents sumes i restes de fraccions algèbriques:

a) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{3x-1}{x+1}$

b) $\frac{x-1}{x^2-4x+4} - \frac{x}{x^2-4}$

c) $\frac{6}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} - \frac{x-1}{x-3}$

3.2.2. Producte de fraccions.

Per multiplicar dues fraccions algèbriques farem el producte dels numeradors i el dividirem pel producte dels denominadors. Caldrà simplificar el resultat, sempre que es pugui.

Per exemple:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x-1}{x^2-4} &= \frac{(x-2)(x-1)}{(x^2-2x+1)(x^2-4)} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2(x+2)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \\ &= \frac{1}{x^2+x-2}.\end{aligned}$$

Activitat 3.4.

Calcula els següents productes de fraccions algèbriques:

b) $\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{3x-1}{x+1}$

b) $\frac{x-1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1}$

c) $\frac{2x^3}{x^2-9} \cdot \left(\frac{x+3}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right)$

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

3.2.3. Divisió de fraccions.

Per dividir dues fraccions algèbriques farem el producte del numerador de la primera fracció amb el denominador de la segona i aquest el dividirem pel producte del numerador de la segona fracció amb el denominador de la primera. Caldrà simplificar el resultats, sempre que es pugui.

Per exemple:

$$\frac{x^2-1}{x^2-4x+4} : \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x^2-1) \cdot (x-2)}{(x^2-4x+4) \cdot (x-1)} = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(x-2)^2 \cdot (x-1)} = \frac{x+1}{x-2}.$$

Activitat 3.5.

Calcula les següents divisions de fraccions algèbriques:

a) $\frac{x-2}{x-1} : \frac{3x-1}{x+1}$

b) $\frac{x-1}{x^2+4x+4} : \frac{x^2-2x+1}{x^2-4}$

d) $\frac{x^2}{x^2-9} : \left(\frac{x+3}{x} + \frac{1}{x-3} \right)$

ACTIVITATS COMPLEMENTARIS:

Activitat 3.6.

Simplifica les següents fraccions algèbriques:

a) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

b) $\frac{2x^2-2}{x^2+3x+2}$

c) $\frac{4x^2-9}{2x^2+x-3}$

Activitat 3.7.

Redueix al més petit denominador comú les següents fraccions algèbriques:

a) $\frac{3-x}{9x^2-4}$ i $\frac{x}{3x^2+5x+2}$

b) $\frac{x-2}{x^2-x-2}$ i $\frac{x-4}{x^2-5x+4}$

c) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ i $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Activitat 3.8.

Calcula les següents operacions amb fraccions algèbriques:

- a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-x}$
- b) $\frac{x-2}{x^2-x-2} + \frac{x-4}{x^2-5x+4}$
- c) $\frac{4}{x^2+2x} - \frac{3x}{x+2} + \frac{3x-2}{x}$
- d) $\frac{x^2-49}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-7}$
- d) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2-4}$
- e) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-1} : \frac{x+3}{2x^2+x-3}$

Activitat 3.9.

Calcula les següents operacions amb fraccions algèbriques:

- a) $\left(x+1+\frac{x^2}{x+1}\right) : \left(1-\frac{x}{x-1}\right)$
- b) $\left(\frac{2}{x+3} + \frac{2}{x-3}\right) : \left[\left(\frac{x^2}{3}-1\right) \cdot \frac{x+1}{x}\right]$
- c) $\frac{1}{x^2+2x} + \frac{x}{x+2} : \left(\frac{x-1}{x+1}-2\right)$

Activitat 3.10.

Resol les següents equacions amb fraccions algèbriques:

- a) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{2x}{x+2} - 1$
- b) $\frac{5}{x} + \frac{x-6}{x^2} = 1 + \frac{1}{x}$
- c) $2 + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}$
- d) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 2$