Escola PRAT

Control de Matemàtiques.
Accés a Cicles Formatius de Grau Superior.

Tema 2. Geometria: Nombres complexos.

RESOLUCIÓ:

1. $x^2 + 4x + 5 = 0$, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \rightarrow x_1 = -2 + i$ i $x_2 = -2 - i$

   $x_1 + x_2 = (-2 + i) + (-2 - i) = -4$.

   $x_1 \cdot x_2 = (-2 + i) \cdot (-2 - i) = (-2)^2 - i^2 = 4 - (-1) = 5$.

2. a) $z = -1 + \sqrt{3}\,i = 2_{120^\circ}$, ja que:

   $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

   tag $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} = -1{,}732050808 \rightarrow \varphi = 120^\circ$

   b) $2_{225^\circ} = 2 \cdot (\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ) = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i) = -1{,}41 - 1{,}41i$.

3. Com $z_1 = 3 - 2i$ i $z_2 = -5 + 4i$, tenim:

   $3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2 = 3 \cdot (3 - 2i) - 2 \cdot (-5 + 4i) = 9 - 6i - (-10 + 8i) = 19 - 14i$

   $(z_1)^3 = (3 - 2i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot (2i) + 3 \cdot 3 \cdot (2i)^2 - (2i)^3 =$
   $= 27 - 54i + 36i^2 - 8i^3 = 27 - 54i - 36 + 8i = -9 - 46i$

4. $\frac{2 + mi}{1 - 2i} = \frac{(2 + mi) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{2 + (m+4)i + 2mi^2}{1 - (2i)^2} = \frac{(2 - 2m) + (m+4)i}{1 - 4i^2} = \frac{2 - 2m}{5} + \frac{m+4}{5} i$

   a) Per tal que sigui un imaginari pur: $\frac{2 - 2m}{5} = 0$, d'on m = 1.

   b) Per tal que sigui un nombre real: $\frac{m+4}{5} = 0$, d'on m = - 4.

5. $\sqrt[3]{4\sqrt{3} - 4i} = \sqrt[3]{8_{330^\circ}}$, ja que:

   $z = 4\sqrt{3} - 4i \rightarrow |z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8$ i tag $\varphi = \frac{-4}{4\sqrt{3}}$, d'on $\varphi = 330^\circ$

   $$\sqrt[3]{8_{330^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{330^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = \begin{cases} 2_{110^\circ} & \text{si } k = 0 \\ 2_{230^\circ} & \text{si } k = 1 = \\ 2_{350^\circ} & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

   $$= \begin{cases} 2 \cdot (\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ) = 2 \cdot (-0{,}34 + 0{,}94i) = -0{,}68 + 1{,}88i \\ 2 \cdot (\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ) = 2 \cdot (-0{,}64 - 0{,}77i) = -1{,}28 - 1{,}54i \\ 2 \cdot (\cos 350^\circ + i \sin 350^\circ) = 2 \cdot (0{,}98 - 0{,}17i) = 1{,}96 - 0{,}34i \end{cases}$$