

Escola PRAT

Control de Matemàtiques.

Accés a Cicles Formatius de Grau Superior.

Tema 3. Funcions i gràfiques: Derivades.

RESPOSTA:

1. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ i $f''(x) = \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ i d'aquí:

$$f''(-2) = \frac{2-2 \cdot (-2)^2}{(1+(-2)^2)^2} = -\frac{6}{25}$$

2. De $f(x) = x^2 \cdot e^x$, tenim: $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x+x^2) \cdot e^x$.
Com $f'(-1) = -e^{-1}$ i $f(-1) = e^{-1}$, l'equació de la recta tangent és:
 $y - e^{-1} = -e^{-1} \cdot (x + 1)$, d'on $y = -e^{-1}x$.

3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$, es demana:

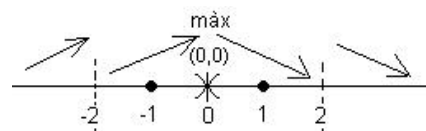
a) $Df = \mathbb{R} - \{2, -2\}$, ja que $x^2 - 4 = 0$ té com a solucions $x = 2$ i $x = -2$.
Asíntotes verticals $x = 2$ i $x = -2$.

Asíntotes horitzontals: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$, d'on $y = 1$.

No tenim asíntotes obliques perquè tenim d'horitzontals.

b) $f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0$, d'on $x = 0$.

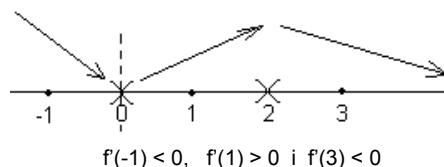
Com $f'(-1) > 0$ i $f'(1) < 0$, tenim que:



4. $f'(x) = \frac{1x^2 - (x+m) \cdot 2x}{x^4} \rightarrow f'(2) = \frac{4 - (2+m) \cdot 4}{16} = \frac{1 - (2+m)}{4} = \frac{-1-m}{4} = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow -1 - m = 0 \rightarrow m = -1$.

Per a $m = -1$, la funció és $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ i la seva derivada $f'(x) = \frac{-x+2}{x^3}$

En $x = 2$ tenim un màxim, ja que:



$f(-1) < 0$, $f'(1) > 0$ i $f(3) < 0$

per tant, en $x = 2$ tenim un màxim.

5. Si x i y són les dimensions de la finestra, el perímetre serà: $p = 2x + 2y = 240$,
i d'aquí que el lligam entre ambdues variables sigui: $y = 120 - x$.
 $A = x \cdot y = x \cdot (120 - x) = 120x - x^2$, i com $A' = 120 - 2x = 0$, ens dóna com a
solució $x = 60$ i $A''(60) = -2 < 0$, tenim un màxim en $x = 60$.
Per a $x = 60$, tenim que $y = 120 - 60 = 60$, d'on les dimensions de la finestra
que deixa entrar màxima llum són les d'un quadrat de costat 60 cm.