

Exercici 1

Com $M_{PQ}(2,-1)$ i $\vec{PQ} = (2,2) \perp \vec{u} = (1,-1)$, tenim que l'equació de la mediatriu al segment PQ és: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1}$, és a dir, $x + y - 1 = 0$.

Com $M_{QR}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ i $\vec{QR} = (3,-3) \perp \vec{v} = (1,1)$, tenim que l'equació de la mediatriu al segment AC és: $\frac{x-\frac{3}{2}}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1}$, és a dir, $x - y = 0$.

El centre s'obté com a intersecció de les dues mediatrius, així doncs, surt com a solució del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Resolent-ho obtenim $x = \frac{1}{2}$ i $y = \frac{1}{2}$. Així doncs, les coordenades del centre són: $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

El radi s'obté com la distància de C a qualsevol dels tres punts. Així doncs, tenim que:

$$r = d(C,Q) = |\vec{CQ}| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}, \text{ ja que } \vec{CQ} = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}).$$

$$\text{L'equació reduïda és: } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}$$

$$\text{L'equació general és: } x^2 + y^2 - x - y - 6 = 0,$$

$$\text{ja que } m = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1, \quad n = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \text{i } p = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 = -\frac{24}{4} = -6.$$

Exercici 2

- a) El centre serà el punt mig del segment PQ, ja que P i Q són dos punts diametralment oposats, és a dir, determinen un diàmetre de la circumferència. Així doncs, tenim que el centre és $C(1, -\frac{1}{2})$ i el radi és la distància de C a qualsevol dels dos punts, per exemple,

$$r = d(C,P) = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}, \text{ ja que } \vec{CP} = (-2, \frac{3}{2}).$$

- b) Com el punt $P(1,-2)$ és de la circumferència i el centre d'aquesta és $C(0,0)$, tenim que el vector director $\vec{u}$ de la recta tangent és perpendicular a $\vec{CP} = (1,-2)$. Com $\vec{u} = (2,1)$, tenim:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} \rightarrow x - 2y - 5 = 0$$

Exercici 3

- a) Dividint tota l'equació per 144 i simplificant, tenim que l'equació reduïda de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \text{ d'on } a^2 = 4 \text{ i } b^2 = 3, \text{ i d'aquí que } a = \pm 2 \text{ i } b = \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Com } c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1, \text{ tenim que } c = \pm 1.$$

Els vèrtexs són: $A(2,0)$, $A'(-2,0)$, $B(0,\sqrt{3})$ i $B'(0,-\sqrt{3})$ i els focus són: $F(1,0)$ i $F'(-1,0)$.

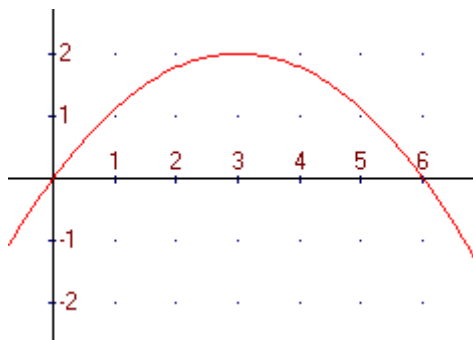
$$\text{L'excentricitat és: } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

- b) Com $2c = 12$, tenim que $c = 6$. I com l'excentricitat és $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$, tenim que $a = 8$.
Ara bé, com $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 36 = 28$, tenim que l'equació de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$$

Exercici 4

a)



Tenim que: $(x - 3)^2 = -2p \cdot (y - 2)$

Com passa pel (0,0), tenim que: $9 = 4p$,
d'on $p = \frac{9}{4}$, i d'aquí que:

$$(x - 3)^2 = -\frac{9}{2} \cdot (y - 2)$$

Les coordenades del focus són: $F(3, -\frac{p}{2})$,

és a dir, $F(3, -\frac{9}{8})$,

- b) Els punts equidisten del focus de la paràbola i de la directriu.
Utilitzant aquesta propietat i tenint en compte que el vèrtex es troba $V(0,0)$, que el focus té coordenades $F(\frac{p}{2}, 0)$ i que la directriu té per equació $r \equiv x = -\frac{p}{2}$, tenim:

$$d(F,P) = |\vec{FP}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad i \quad d(P,r) = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Com $d(F,P) = d(P,r)$, tenim:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|, \text{ d'on } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

i d'aquí que: $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$, d'on $y^2 = 2px$

Exercici 5

- a) L'equació de la hipèrbole equilàtera de centre (0,0) és $x^2 - y^2 = a^2$. Com en tota hipèrbole equilàtera $a = b$ i, en el nostre cas, $c = 2$ ja que el focus té coordenades $F(0,-2)$, tenim:
 $2^2 = a^2 + b^2 = 2 \cdot a^2$, d'on $a^2 = 2$. L'equació és: $x^2 - y^2 = 2$.

L'excentricitat és $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

- b) De l'equació de la hipèrbole $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} = 1$, podem deduir que $a = 9$ i $b = 7$, d'on les dues asíptotes tenen per equació: $y = \pm \frac{7}{9} \cdot x$.