DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
EXAMEN DE MATEMÀTIQUES 1
Temes 1-2-3

RESOLUCIÓ:

<u>Primera part</u>:

1. a) Pel Teorema de Pitàgores: $2^2 = h^2 + 1^2$, d'on h = $\sqrt{3}$, i d'aquí que R = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dm.

$A_{triangle} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ dm^2 i $A_{cecle} = \pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$ dm^2, d'on

$A_{part\ ombrejada} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0{,}684853256... \approx 0{,}68$ dm^2.

$p_{part\ ombrejada} = 6 + 2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 9{,}627598728... \approx 9{,}63$ dm.

b) Reduïnt al mínim comú denominador, tenim: $\frac{18x^2+30}{6} - \frac{18x^2-3}{6} \geq \frac{6}{6} + \frac{5x-2}{6}$, i

d'aquí $18x^2 + 30 - 18x^2 + 3 \geq 6 + 5x - 2$, d'on $33 \geq 4 + 5x$, i $x \leq \frac{29}{5}$.

Solució: $x \in (-\infty, \frac{29}{5}]$

2. a) $\frac{32\cdot\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^5\cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{19}{3}}}{2^{-\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{43}{6}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{16}+\sqrt{6}}{8-3} = \frac{4+\sqrt{6}}{5}$

3. a) Es tracta de combinacions perquè l'ordre dels factors en un producte no varia el resultat, d'aquí que el nombre de productes diferents que es poden formar amb 3 factors sigui:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

D'aquests, seran múltiples de 2 tots els productes que tinguin el dos com a factor, per tant, $C_{4,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

b) És un cas de variacions ordinàries, ja que influeix l'ordre, doncs cadascun d'ells tenen responsabilitats diferents. Així doncs, tenim:
$V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$.
$V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$
Com cada grup de professors s'ha de combinar amb el grup d'alumnes, el nombre de comissions és: $56 \cdot 6840 = 383040$.

4. a) $x\cdot(x - 1) + \dfrac{x!}{2!\cdot(x-2)!} = 84$, d'on $x\cdot(x - 1) + \dfrac{x\cdot(x-1)}{2} = 84$, i d'aquí que $\dfrac{3x\cdot(x-1)}{2} = 84$.

I de l'equació anterior surt $x^2 - x - 56 = 0$, que té com a solucions $x = 8$ i $x = -7$.
De les dues solucions només pot ser vàlida $x = 8$.

b) El terme 6é del desenvolupament de $\left(2x - \dfrac{1}{4}\right)^8$ és:

$$\binom{8}{5}\cdot(2x)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -56 \cdot 8x^3 \cdot \frac{1}{1024} = -\frac{7}{16}x^3.$$

<u>Segona part</u>:

5. a) $3\cdot\sqrt{128} - 5\cdot\sqrt{32} + \sqrt{\dfrac{8}{9}} = 3 \cdot 8\cdot\sqrt{2} - 5 \cdot 4\cdot\sqrt{2} + \dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{2} = (24 - 20 + \dfrac{2}{3})\cdot\sqrt{2} = \dfrac{14}{3}\cdot\sqrt{2}$.

b) $\dfrac{\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[6]{18}}{\sqrt[4]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2\cdot3^2}}{\sqrt[4]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^{16}}\cdot\sqrt[12]{2^2\cdot3^4}}{\sqrt[12]{2^6}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^{18}\cdot3^4}{2^6}} = \sqrt[12]{2^{12}\cdot3^4} = 2\cdot\sqrt[12]{3^4} = 2\cdot\sqrt[3]{3}$.

6. a) Com $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ i l'angle és del 2n quadrant, tenim que:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{i} \quad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

D'aquí que: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}} = -\dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{7}$

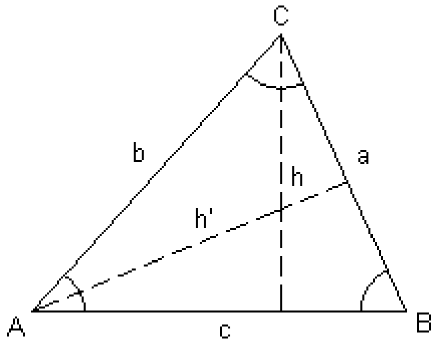
b) $\sin A = \dfrac{h}{b}$ i $\sin B = \dfrac{h}{a}$, d'on $h = b\cdot\sin A = a\cdot\sin B$,

d'on $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$.

$\sin B = \dfrac{h'}{c}$ i $\sin C = \dfrac{h'}{b}$, d'on $h' = c\cdot\sin B = b\cdot\sin C$,

d'on $\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

D'aquí que $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$



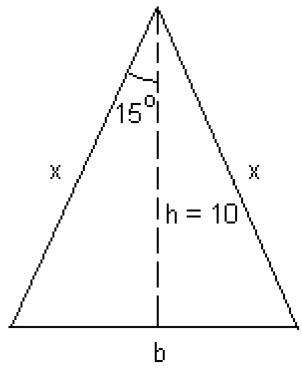
7. a) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588$$

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}9659$$

Com els angles de 75° i 15° són complementaris, tenim que:
sin 75° = cos 15° ≈ 0,9659
cos 75° = sin 15° ≈ 0,2588

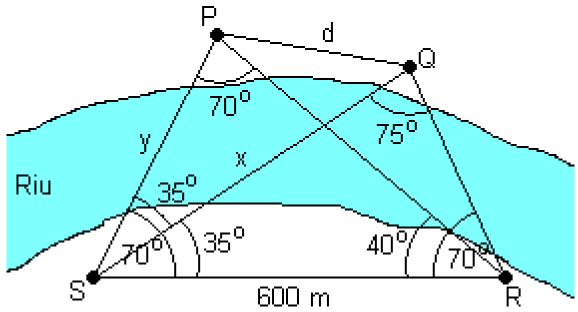


b) $\cos 15° = \frac{10}{x} = 0{,}9659$, d'on x = 10,35 cm.

$\sin 15° = \frac{\frac{b}{2}}{10{,}35} = 0{,}2588$, d'on b = 5,36 cm.

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5{,}36 \cdot 10}{2} = 26{,}8 \text{ cm}^2$.

8.



En el triangle SQR, l'angle SQR és de 75°. Aplicant el Teorema dels sinus, tenim:
$\frac{\sin 70°}{x} = \frac{\sin 75°}{600}$, d'on $x = \frac{600 \cdot \sin 70°}{\sin 75°} = 583{,}70$ m

En el triangle SPR, l'angle SPR és de 70°. Aplicant el Teorema dels sinus, tenim:
$\frac{\sin 40°}{y} = \frac{\sin 70°}{600}$, d'on $x = \frac{600 \cdot \sin 40°}{\sin 70°} = 410{,}42$ m

En el triangle SPQ, l'angle PSQ és de 35°. Aplicant ara el Teorema del cosinus, tenim:
$d^2 = 583{,}70^2 + 410{,}42^2 - 2 \cdot 583{,}70 \cdot 410{,}42 \cdot \cos 35° = 116674{,}61$, d'on:
d = 341,58 m