DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

EXAMEN DE MATEMÀTIQUES 1

Temes 4-5-6

RESOLUCIÓ:

Primera part:

1. a) Si ABCD formen un paral·lelogram, els vectors $\vec{AB} = (2,3)$ i $\vec{DC} = (7-x,4-y)$ són equipolents, d'aquí que $2 = 7-x$ i $3 = 4-y$, d'on $x = 5$ i $y = 1$. Les coordenades de D són (5,1).

   b) Com $\vec{AB} = (-4,2)$, $\vec{AC} = (1,7)$ i $\vec{BC} = (5,5)$, tenim que:

   $d(A,B) = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   $d(A,C) = \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

   $d(B,C) = \left|\vec{BC}\right| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

   Els punts A, B i C formen triangle, ja que $\sqrt{20} < \sqrt{50} + \sqrt{50}$. Es tracta d'un triangle isòsceles ja que té dos costats.
   L'àrea del triangle és:

   $$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}}}{2} = 15\,u^2,$$

   on $b = \left|\vec{BC}\right| = 5\sqrt{2}$ i $h = d(A,r_{BC}) = \frac{|2-(-1)+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$, essent r_{BC} la recta $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{5}$, és a dir, $x - y + 3 = 0$.

2. a) La recta perpendicular a r pertany a la família de rectes del tipus $x - y + C = 0$. Com ha de passar pel punt P(1,2), tenim que $C = 1$. I d'aquí que l'equació perpendicular a r que passa per P sigui $s \equiv x - y + 1 = 0$.
   La projecció ortogonal de P sobre r és el punt de tall de les rectes r i s, així doncs, tenim que és la solució del sistema:

   $$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

   Com la solució és $x = 0$ i $y = 1$, la projecció ortogonal de P sobre r és M(0,1).

   b) Les coordenades del punt P' simètric de P respecte de r s'obtenen tenint en compte que M és el punt mig del segment PP'. Així doncs, tenim:

   $M(0,1) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$, d'on $x = -1$ i $y = 0$. Les coordenades del punt simètric són P'(-1,0).

3. a) $z_1 - 2\cdot z_2 = (3 - 2i) - 2\cdot(4 + 3i) = -5 - 8i$

$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)\cdot(4 + 3i) = 12 + 9i - 8i - 6i^2 = 18 + i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{4+3i} = \frac{(3-2i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)} = \frac{12-9i-8i+6i^2}{16-9i} = \frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$$

b) $z = (1+\sqrt{3}\,i)^3 = (2_{60^\circ})^3 = 8_{180^\circ} = 8\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot\sin 180^\circ) = -8 + 0\cdot i$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot k}{3}} = 2_{60^\circ+120^\circ\cdot K} = \begin{cases} 2_{60^\circ} = 2\cdot(\cos 60^\circ + i\cdot\sin 60^\circ) = 1+\sqrt{3}i \\ 2_{180^\circ} = 2\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot\sin 180^\circ) = -2+0\cdot i \\ 2_{240^\circ} = 2\cdot(\cos 240^\circ + i\cdot\sin 240^\circ) = -1-\sqrt{3}i \end{cases}$$

4. a) L'equació general d'una circumferència és $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Com passa pels punts P(0,1), Q(2,-1) i R(1,2), tenim:

$$\begin{cases} 1+n+p=0 \\ 4+1+2m-n+p=0 \\ 1+4+m+2n+p=0 \end{cases}, \text{ d'on } \begin{cases} n+p=-1 \\ 2m-n+p=-5 \\ m+2n+p=-5 \end{cases}$$

Resolent el sistema tenim que: m = -3, n = -1 i p = 0, d'on

$m = -2a = -3$, i d'aquí $a = \frac{3}{2}$,

$n = -2b = -1$, i d'aquí $b = \frac{1}{2}$, i

$p = a^2 + b^2 - r^2 = 0$, i d'aquí $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

La circumferència té el centre en el punt C(1,1) i el radi és r = 1.

b) El punt mig del segment AB ens dóna el centre de la circumferència, així doncs, tenim: $C\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = (4,0)$. El radi és la distància d'A a C, així doncs, tenim: $r = d(A,C) = \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, ja que $\vec{AC} = (1,-2)$. I d'aquí que l'equació reduïda de la circumferència sigui $(x - 4)^2 + y^2 = 5$.

<u>**Segona part**</u>:

5. a) El sistema $\begin{cases} 3x+2y-4=0 \\ x-4y+1=0 \end{cases}$ té com a solució $x = 1$ i $y = \frac{1}{2}$. El punt de tall d'ambdues rectes és $Q(1, \frac{1}{2})$.

Com $\vec{PQ} = (-1, \frac{11}{2})$. Podem agafar com a vector director de la recta que passa per P i per Q a $\vec{u} = (-2,11)$.

L'equació en forma continua de la recta és: $\frac{x-2}{-2} = \frac{x+5}{11}$.

b) Els vectors directors d'ambdues rectes són $\vec{u} = (2,-3)$ i $\vec{u} = (4,1)$, d'aquí que:

$\cos\varphi = \frac{8-3}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{16+1}} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = 0{,}3363364$, d'on $\varphi = 70{,}3^\circ$.

6. $\frac{m+i}{3+2i} = \frac{(m+i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \frac{3m-2mi+3i-2i^2}{9-4i^2} = \frac{3m+2}{13} + \frac{3-2m}{13}\cdot i$

a) Imaginari pur = part real nul·la $\rightarrow$ $\frac{3m+2}{13} = 0$, d'on m = $-\frac{2}{3}$

b) Nombre real = part imaginària nul·la $\rightarrow$ $\frac{3-2m}{13} = 0$, d'on m = $\frac{3}{2}$

7. a) La circumferència és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fixe anomenat centre. La distància del centre a qualsevol punt de la circumferència rep el nom de radi.
Si el centre és C(a,b) i el radi r, de la definició anterior, tenim que d(C,P) = r, essent P un punt qualsevol de la circumferència.
Sigui P(x,y), tenim:
d(C,P) = $\left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, d'on obtenim $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, expressió que ens dóna l'equació reduïda de la circumferència de centre C(a,b) i radi r.

b) És certa, ja que en les hipèrboles equilàteres a = b, i com $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, tenim que c = $\sqrt{2}$ a. L'excentricitat serà doncs, e = $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$.

8. a) Les equacions de les paràboles de vèrtex V(-1,2) prenen la forma:

$$(y - 2)^2 = 2p\cdot(x + 1), \text{ o bé, } (x + 1)^2 = 2p\cdot(y - 2),$$

segons que la directriu sigui perpendicular a l'eix d'abscisses o a l'eix d'ordenades, respectivament.
Com totes dues paral·leles passen pel punt (0,0), tenim:

- En el primer cas, $(0 - 2)^2 = 2p\cdot(0 + 1) \rightarrow 4 = 2p \rightarrow p = 2$,
  I d'aquí que una de les paràboles sigui $(y - 2)^2 = 4\cdot(x + 1)$.
- En el segon cas, $(0 + 1)^2 = 2p\cdot(0 - 2), \rightarrow 1 = -4p \rightarrow p = -\frac{1}{4}$,
  i d'aquí que l'altra paràbola sigui $(x + 1)^2 = -\frac{1}{2}\cdot(y - 2)$.

b) Com c = 12 i a = 13, tenim que: $b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$. L'equació de l'el·lipse centrada en l'origen de coordenades és:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

L'excentricitat d'aquesta el·lipse és: e = $\frac{c}{a} = \frac{12}{13} = 0{,}923$.