**Exercici 1:**

Anem a calcular $A^{-1}$ i $B^{-1}$:

$|A| = -1$, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ i adj $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, d'aquí que $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$|B| = 7$, $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ i adj $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, d'aquí que $B^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$$(A + B^{-1}) \cdot A^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} & \frac{22}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & 1 \\ \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercici 2:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostració per inducció:

**Fase 1**: Anem a desmostrar que es certa per a n = 1 i n = 2.

Si n = 1: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2^1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, certa.

Si n = 2: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2^2 & 2^2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, certa.

**Fase 2**: Hipòtesi d'inducció. Anem a suposar que l'expressió d' $A^n$ és certa fins a n = k, és a dir,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Fase 3**: Anem a demostrar que és certa per a n = k + 1.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 2^k \cdot 2 & 2^k + 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 2^{k+1} & 2^{k+1} - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant, l'expressió és certa per a qualsevol valor de n.

**Exercici 3:**

a) Sumant les files I+II, I+III, I+IV i I+V, tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x + 1)^4$$

b) El determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ és 0 perquè la fila IV és combinació lineal de les altres tres files: IV = III + II – I.
I, com la fila III és combinació lineal de les dues primeres: III = 2·II – I, el rang A = 2.

**Exercici 4:**

Com $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rang M = 3, i el rang M' = 3, d'aquí que el sistema sigui compatible determinat.

Resolució pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -32 & -32 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = -8 \\ z = 1 \end{cases}$$, d'on x = 2, y = -1 i z = 1.

**Exercici 5:**

Resolent l'equació $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ m & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 + 8 = 0$, tenim $m = \pm 2$.

Discusió del sistema pels diferents valors de m:

- Si m = 2, rang M = 2 i rang M' = 3, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, d'aquí que el sistema sigui incompatible.

- Si m = -2, rang M = 2 i rang M' = 3, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$, d'aquí que el sistema sigui incompatible.
- Si m $\neq$ 2, -2, rang M = 3 i rang M' = 3, d'aquí que el sistema sigui compatible determinat.

Resolució del sistema per a $m \neq 2$ i -2:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-2m^2+8} = \frac{-5m+5}{-2m^2+8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-2m^2+8} = \frac{m^2-5m+6}{-2m^2+8} = \frac{m-3}{-2m-4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ m & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-2m^2+8} = \frac{-5m+15}{-2m^2+8}$$

La solució és: $\left(\frac{-5m+5}{-2m^2+8}, \frac{m-3}{-2m-4}, \frac{-5m+15}{-2m^2+8}\right)$