

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN DE CÀLCUL DIFERENCIAL

1a PART:

Exercici 1:

$$a) f'(x) = \frac{1}{x - e^{\cos x}} \cdot (1 - e^{\cos x} \cdot (-\sin x)) = \frac{1 + e^{\cos x} \cdot \sin x}{x - e^{\cos x}}$$

$$b) f'(x) = m \cdot e^x + (mx + 1) \cdot e^x = (mx + m + 1) \cdot e^x$$

$$f''(x) = m \cdot e^x + (mx + m + 1) \cdot e^x = (mx + 2m + 1) \cdot e^x.$$

Com $f''(2) = 0$, tenim que: $f''(2) = (4m + 1) \cdot e^2 = 0$, d'on $4m + 1 = 0$, i d'aquí $m = -1/4$.

Exercici 2:

$$a) f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \text{ per qualsevol valor de } x, \text{ d'aquí que la funció sigui sempre creixent.}$$

En $x = 0$, la funció té un punt d'inflexió.

$$b) f'(-1) = 1 \text{ i } f(-1) = -1/2, \text{ d'aquí que l'equació de la recta tangent sigui: } y + 1/2 = 1 \cdot (x + 1), \text{ és a dir, } y = x + 1/2.$$

Exercici 3:

- a) Com els valors que anul·len el denominador són les solucions de l'equació $\ln x = 0$, tenim que $x = 1$ és una asymptota vertical.

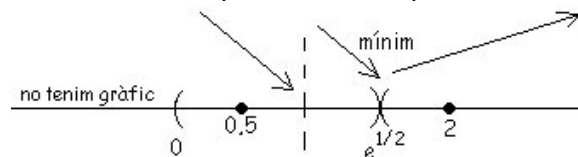
Aquesta funció no té asymptotes horitzontals, ja que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

i tampoc té asymptotes oblíquues, perquè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$b) \text{ De } f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x \cdot \ln x - x}{(\ln x)^2} = \frac{x \cdot (2 \cdot \ln x - 1)}{(\ln x)^2} = 0, \text{ es dedueix que } x = 0, \text{ o bé, } 2 \cdot \ln x - 1 = 0, \text{ d'on es dedueix que } \ln x = 1/2 \text{ i per tant, } x = e^{1/2}.$$



Com $f'(0,5) < 0$, la funció decreix en els intervals $(0,1)$ i $(1, e^{1/2})$ i com $f'(2) > 0$, la funció creix en $(e^{1/2}, +\infty)$, d'aquí que en $x = e^{1/2}$ tenim un mínim relatiu.

Exercici 4:

Com $f(x)$ és continuïtat en $x = 0$ i, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + bx + 3) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + ax + b}{x + 1} = b$, d'on $b = 3$.

Com $f(x)$ és derivabilitat en $x = 0$, i la funció derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 2x + a - 3}{(x + 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad f'(0^-) = 3 \text{ i } f'(0^+) = a - 3, \text{ d'on } 3 = a - 3, \text{ i d'aquí } a = 6.$$

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN DE CÀLCUL DIFERENCIAL

2a PART:

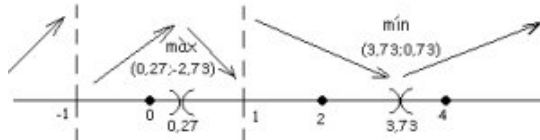
Exercici 1:

1) El domini: $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

2) Els intervals de creixement i de decreixement. Els extrems relatius:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 2}{(x^2 - 1)^2} = 0, \text{ d'aquí que } 2x^2 - 8x + 2 = 0 \text{ i les solucions aproximades són}$$

$$x_1 = 3,73 \text{ i } x_2 = 0,27.$$



Com $f'(0) > 0$, $f(x)$ és creixent en els interval $(-\infty, -1)$ i $(-1; 0,27)$, com $f'(2) < 0$, $f(x)$ és decreixent en els intervals $(0,27; 1)$ i $(1; 3,73)$ i com $f'(4) > 0$, $f(x)$ és creixent en l'interval $(3,73; +\infty)$.

Tenim doncs, un màxim i un mínim. Les coordenades del màxim són $(0,27; -2,73)$ i les coordenades del mínim són $(3,73; 0,73)$.

3) Les asímptotes:

Asímptotes verticals: $x = 1$ i $x = -1$.

Asímptota horitzontal: $y = 1$, ja que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = 1$.

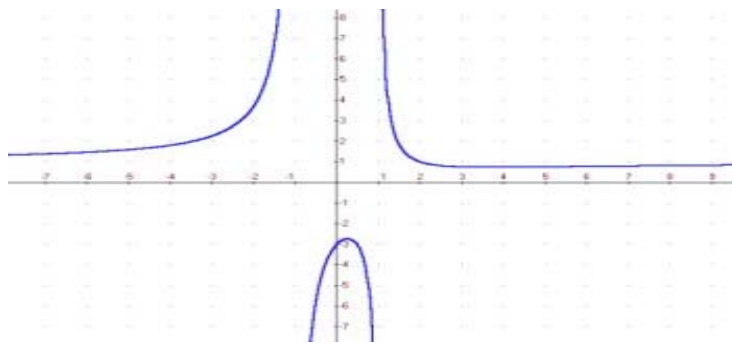
No tenim asímptota oblíqua perquè tenim asímptota horitzontal.

4) Els punts de tall del gràfic als eixos de coordenades:

Com $f(0) = -3$, el punt $(0, -3)$ és un punt de tall a l'eix OY.

Com $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} = 0$ ens porta a tenir que resoldre l'equació $x^2 - 2x + 3 = 0$, i aquesta no té solució, no tenim punts de tall a l'eix OX.

5) El gràfic:

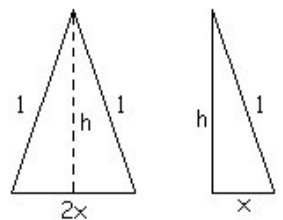


Exercici 2:

a) Pel Teorema de Pitàgores, tenim: $1^2 = h^2 + x^2$, d'on $h = \sqrt{1 - x^2}$.

$$A = \frac{2x \cdot \sqrt{1 - x^2}}{2} = x \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

b) $A' = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$, d'on $x = \sqrt{0,5} \approx 0,71$.



Com $A'(0,70) > 0$ i $A'(0,72) < 0$, tenim que per a $x = 0,71$ l'àrea és màxima. La base del triangle serà 1,42 cm i l'àrea màxima: 0,5 cm².