

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
IES L'ALZINA

EXAMEN DE GEOMETRIA DE L'ESPAI

RESOLUCIÓ:

1. a) Substituint $y = 0$ i $z = 0$ en l'equació del pla $2x + y + 3z - 6 = 0$, tenim que $x = 3$, d'aquí que el punt de tall a l'eix OX sigui $P(3,0,0)$; fent $x = 0$ i $z = 0$, tenim que $y = 6$, per tant el punt de tall a l'eix OY és $Q(0,6,0)$; i fent $x = 0$ i $z = 0$, tenim que $z = 2$, d'on $R(0,0,2)$ és el punt de tall a l'eix OZ.

Com $\vec{OP} = (3,0,0)$, $\vec{OQ} = (0,6,0)$ i $\vec{OR} = (0,0,2)$, el volum del tetraedre definit pels punts O, P, Q i R és:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 \text{ u}^3$$

- b) El vector director de la recta és $\vec{u} = (3,2,-1)$ i el vector característic del pla $\vec{w} = (2,1,3)$. D'aquí tenim:

$$\sin \varphi = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{9 + 4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{5}{14} = 0,357142857 \rightarrow \varphi = 20,9^\circ.$$

2. a) El vector director de la recta r ve donat pel producte vectorial dels vectors característics dels plans que la determinen. D'aquí que $\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = (-1,1,1)$, ja que $\vec{w}_1 = (1,1,0)$ i $\vec{w}_2 = (0,1,-1)$. I el vector característic del pla π és $\vec{w} = (1,-3,2)$.

Com el pla que busquem és perpendicular al pla π i paral·lel a la recta r , el seu vector característic és el producte vectorial d' $\vec{u}$ i de $\vec{w}$. Així doncs, tenim:

$$\vec{w}' = \vec{u} \wedge \vec{w} = (5,3,2), \text{ d'on el pla pertany a la família de plans } 5x + 3y + 2z + D = 0.$$

Ara bé, el pla passa pel punt $P(-1,2,0)$, d'aquí que $D = -1$.

El pla té per equació $5x + 3y + 2z - 1 = 0$.

- b) Per determinar la distància del punt P a la recta r necessitem els mòduls dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{u} \wedge \vec{PQ}$, on $P(-1,2,0)$ és el punt que em dona el problema i $Q(1,0,1)$ és un punt qualsevol de la recta r .

Com $\vec{PQ} = (2,-2,1)$, tenim que $\vec{u} \wedge \vec{PQ} = (3,3,0)$, d'on:

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{9+9+0}}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{6} \text{ u.}$$

3. Els vectors directors de les rectes són $\vec{u} = (-1,m,1)$ i $\vec{v} = (1,-2,-1)$. Agafem un punt de cada recta: $P(-2,1,0)$ de r i $Q(0,1,m)$ de r' , i definim el vector $\vec{PQ} = (2,0,m)$.

$$\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 4 - m^2 = 0, \text{ d'on } m = \pm 2.$$

- Si $m = 2$, $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 1$, ja que tots dos vectors són linealment dependents, i $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Estem davant de **dues rectes paral·leles**.
- Si $m = -2$, $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, ja que $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, i $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 2$. Estem davant de **dues rectes que es tallen en un punt**.
- Si $m \neq 2$ i -2 , $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, ja que tots dos vectors són linealment independents, i $\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 3$, ja que $\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} \neq 0$. Estem davant de **dues rectes que es creuen**.

4. Per determinar el punt simètric d'un punt respecte d'un pla, cal trobar la recta perpendicular al pla que passa pel punt. El vector director d'aquesta recta és el característic del pla, com aquest vector és $\vec{w} = (1, -3, 2)$ i les coordenades del punt són $P(3, 1, -1)$, l'equació de la recta és:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 + 3k \\ z = -1 - k \end{cases}$$

Aquesta recta talla al pla en un punt M, que serà el punt mig del segment PP' . Substituint les expressions de x, y i z en l'equació del pla, tenim: $2 \cdot (3 + 2k) + 3 \cdot (1 + 3k) - (-1 - k) + 1 = 0$, d'on $k = -\frac{11}{14}$. Substituint aquest valor en l'equació de la recta, tenim que les coordenades

del punt M són: $M(\frac{10}{7}, -\frac{19}{14}, -\frac{3}{14})$.

Anem a determinar les coordenades del punt P' simètric de P:

$$M(\frac{10}{7}, -\frac{19}{14}, -\frac{3}{14}) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z-1}{2} \right),$$

d'on $x = -\frac{1}{7}$, $y = -\frac{26}{7}$ i $z = \frac{4}{7}$, és a dir, $P'(-\frac{1}{7}, -\frac{26}{7}, \frac{4}{7})$.