

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN DE GEOMETRIA DE L'ESPAI

Exercici 1:

- a) Fent el producte vectorial del vector director de la recta r i el vector característic del pla π , obtenim el vector característic del pla que és paral·lel a la recta i perpendicular al pla. Així doncs, tenim: Com $\vec{u} = (3,2,0)$ i $\vec{w} = (2,1,-1)$, $\vec{w}' = \vec{u} \wedge \vec{w} = (-2,3,-1)$, d'aquí que el pla sigui de la família $-2x + 3y - z + D = 0$. Com ha de passar pel punt $P(2,3,-1)$, tenim que: $-4 + 9 + 1 + D = 0$, d'on $D = -6$, i l'equació del pla és $-2x + 3y - z - 6 = 0$.
- b) $\sin \alpha = \frac{8}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{6}} = 0,9058$, d'on $\alpha = 64,93^\circ$.

Exercici 2:

- a) Com $\vec{AB} = (2,-1,-2)$, $\vec{AC} = (1,-1,-1)$ i $\vec{AD} = (3,-2,0)$.
- $$V_{\text{tetraedre}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{2} u^3.$$
- b) Com $\vec{BC} = (-1,0,1)$ i $\vec{BD} = (1,-1,2)$, el vector $\vec{w} = \vec{BC} \wedge \vec{BD} = (1,3,1)$ és el vector característic del pla que passa pels punts B, C i D. Així doncs, el pla pertany a la família de plans $x + 3y + z + D = 0$. Com $C(1,0,0)$ és del pla, tenim que: $1 + D = 0$, d'on $D = -1$, i l'equació serà: $x + 3y + z - 1 = 0$.
- $$d(A, \pi) = \frac{|0 + 3 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} u.$$

Exercici 3:

Com $r \parallel \pi$, tenim que $\vec{u} \perp \vec{w}$, i d'aquí $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Sabem que $\vec{u} = (a,2,-2)$ i que $\vec{w} = (1,-1,1)$, d'aquí que $\vec{u} \cdot \vec{w} = a - 2 - 2 = a - 4 = 0$, d'on $a = 4$.

El vector característic del pla que conté a la recta r i és perpendicular a pla π és: $\vec{w}' = \vec{u} \wedge \vec{w} = (0,-6,-6)$, d'on la seva equació pertany a la família de plans $-6y - 6z + D = 0$. Com passa per $P(1,0,-1)$, tenim: $6 + D = 0$, d'on $D = -6$, i l'equació és $-6y - 6z - 6 = 0$, o bé, $y + z + 1 = 0$.

Exercici 4:

Per determinar el punt P' simètric de P respecte de la recta r , buscarem el pla que és perpendicular a r i passa per P . Aquest pla conté P' que és un dels extrems d'un segment on el punt de tall de la recta i el pla és el seu punt mig.

1. Equació del pla perpendicular a r que passa per P :

El vector director de la recta és $\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = (-1,1,-1)$, on $\vec{w}_1 = (1,1,0)$ i $\vec{w}_2 = (1,0,-1)$, és el vector característic del pla. Així doncs, tenim que el pla és $-x + y - z + D = 0$. Com conté el punt $P(1,0,2)$, tenim que $-3 + D = 0$, d'on $D = 3$.

2. Punt de tall de la recta r i el pla:

Resolent el sistema:

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN DE GEOMETRIA DE L'ESPAI

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ -x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

obtenim que el punt de tall és $M(1, -1, 1)$. Aquest punt és el punt mig del segment PP' .

3. Punt simètric a P respecte de la recta r:

$M(1, -1, 1) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z+2}{2} \right)$, d'on $x = 1$, $y = -2$ i $z = 0$, és a dir, les coordenades del punt simètric a P respecte de la recta r és $P'(1, -2, 0)$.