

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
IES L'ALZINA

RESOLUCIÓ DE L'EXAMEN GLOBAL D'ÀLGEBRA I GEOMETRIA

QÜESTIONS:

$$Q1. A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & a^2 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'on } \begin{cases} 2a = a \\ a^2 = a \\ a+1 = 1 \end{cases}, \text{ i d'aquí}$$

que $a = 0$.

La matriu A és idempotent si $a = 0$.

Q2. a) Com $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, aleshores el rang $M = \text{rang } M^? = 2$ i com el nombre d'incògnites és $n = 3$, pel Teorema de Rouché-Fröbenius el SCI.

b) Com el rang és 2, fem: $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ -x + 2y = -z \end{cases}$ i resollem el sistema per Cramer, d'on:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ -z & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2+3z}{5} \quad \text{i} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+z \\ -1 & -z \end{vmatrix}}{5} = \frac{1-z}{5}$$

Solució: $\left\{ \left(\frac{2+3z}{5}, \frac{1-z}{5}, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$.

Si fem $z = \lambda$, les solucions les podem escriure en forma paramètrica:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \lambda \\ y = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

i com molt bé sabem, representen a una recta.

Q3. El vector director de la recta r és $\vec{u} = (3, -1, 2)$ i el característic del pla π és $\vec{w} = (3, 2, -1)$.

El vector director de la recta perpendicular a r i paral·lela a π és $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} = (-3, 9, 9)$, d'aquí que la recta sigui:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-3}{9}, \text{ o bé, } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{3}$$

Q4. A partir dels punts $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 1, 3)$, $R(-1, 2, 1)$ i $S(2, 0, 0)$, definim els vectors:

$$\vec{PQ} = (-1, 2, 1),$$

$$\vec{PR} = (-2, 3, -1) \text{ i}$$

$$\vec{PS} = (1, 1, -2).$$

Com $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, els punts no són coplanaris i per tant determinen un

tetràedre de volum: $V = \frac{1}{6} \cdot |-10| = \frac{5}{3} u^3$.

Q5. La recta perpendicular al pla que passa pel punt $P(1,2,3)$ és:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Com $x + z = (1 + \lambda) + (3 + \lambda) = 4 + 2\lambda = 0$, i d'aquí, $\lambda = -2$, tenim que les coordenades del punt d'intersecció d'aquesta recta amb el pla són: $M(-1,2,1)$, essent M el punt mig del segment PP' , on P' és el simètric de P respecte del pla. Així doncs, tenim:

$$M(-1,2,1) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2} \right), \text{ d'on es dedueix fàcilment que } P'(-3,2,-1).$$

PROBLEMES:

P1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 1-m \end{vmatrix} = m^2 - 2m = 0, \text{ d'on } m = 0 \text{ i } m = 2.$$

a) Discussions:

- Si $m = 0$, el rang $M = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ i el rang $M' = 3$, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ el sistema és incompatible, és a dir, no té solució.}$$

- Si $m = 2$, el rang $M = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ i el rang $M' = 2$, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ el sistema és compatible indeterminat, és a dir, té infinites}$$

solucions que depenen d'un paràmetre.

- Si $m \neq 0$ i 2 , el rang $M = \text{rang } M' = 3$, i el sistema és compatible determinat, és a dir, té una única solució.

b) Interpretacions geomètriques:

- Si $m = 0$, tres plans que es tallen dos a dos segons rectes i formant una tenda de campanya, o bé, recta paral·lela a un pla.
- Si $m = 2$, tres plans que es tallen segons una recta, o bé, recta continguda en un pla.

- Si $m \neq 0$ i 2, tres plans que es tallen en un punt, o bé, recta que talla a un pla en un punt.

P2. Per buscar la mínima distància entre les rectes $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-1}$ i $r' \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$,

determinarem primer el pla que conté a r' i que és paral·lel a r . El vector característic d'aquest pla és el producte vectorial dels vectors directores de les rectes. Així doncs,

com $\vec{u} = (2,0,-1)$ i $\vec{v} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = (1,-1,1)$, on $\vec{w}_1 = (1,0,-1)$ i $\vec{w}_2 = (1,1,0)$, tenim:

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-1,-3,-2)$, i d'aquí: $-x - 3y - 2z + D = 0$.

Com $Q(0,-1,-1)$ és un punt de r' , també ho serà del pla. D'aquí doncs, que $D = -5$, i l'equació del pla que conté a r' és $\pi \equiv x + 3y + 2z + 5 = 0$.

Per determinar la distància mínima entre r i r' , tenim que $d(r,r') = d(r, \pi) = d(P, \pi)$, on P és un punt de r , per exemple, $P(1,0,-1)$, d'aquí que:

$$d(r,r') = \frac{|1+0-2+5|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7} u$$