

QÜESTIÓ 1:

Com $A^{-1} = A$, tenim: $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -a^2 + a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'aquí que:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ -a^2 + a = 0 \end{cases}, \text{ d'on } a = \pm 1 \text{ i } (-a + 1) \cdot a = 0. \text{ Com } a \neq 0, -a + 1 = 0, \text{ i d'aquí que } a = 1.$$

QÜESTIÓ 2:

De $A \cdot X = 3 \cdot B - 2 \cdot I$, tenim que $X = A^{-1} \cdot (3 \cdot B - 2 \cdot I)$.

Anem a calcular A^{-1} . Aquesta matriu existeix perquè $|A| = 2 \neq 0$.

$$\text{Com } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tenim que:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$3 \cdot B - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

QÜESTIÓ 3:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ ja que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2, \text{ ja que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema és compatible indeterminat.

Si suprimim la 3ª equació i la substituïm per l'equació $x + y + z = 0$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN GLOBAL D'ÀLGEBRA I GEOMETRIA

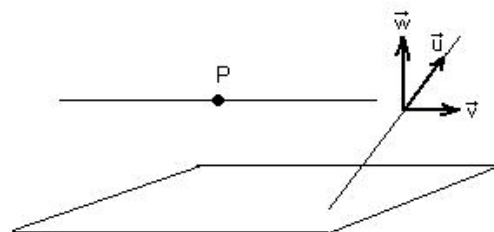
Com $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el rang de la matriu ampliada és 3 i el sistema és compatible determinat.

QÜESTIÓ 4:

Com $\vec{u} = (5, 1, -1)$ i $\vec{w} = (2, 1, -3)$, tenim que $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} = (-2, 13, 3)$.

L'equació de la recta que passa pel punt $P(3, 2, 1)$, és paral·lel al pla $2x + y - 3z + 5 = 0$ i perpendicular a la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ és:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-1}{3}$$



QÜESTIÓ 5:

Com $\vec{w}_1 = (1, -2, 1)$ i $\vec{w}_2 = (1, -4, -5)$, tenim que $\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = (14, 6, -2)$. Podem agafar com a vector

director de la recta $\vec{u}' = (7, 3, -1)$.

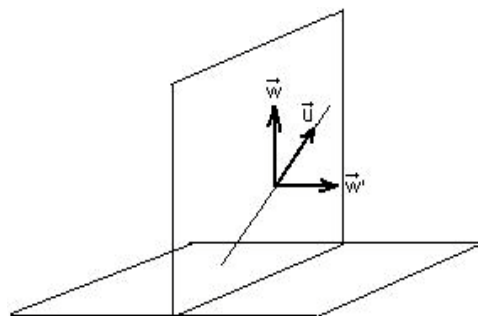
El vector característic del pla és:

$\vec{w}' = \vec{u}' \wedge \vec{w} = (11, -31, -16)$, i el pla serà:

$$11x - 31y - 16z + D = 0.$$

Com aquest pla conté a tots els punts de la recta, agafant un punt d'ella, per exemple, $P(1, 0, -1)$, tenim que $D = -27$, i l'equació del pla és:

$$11x - 31y - 16z - 27 = 0.$$



PROBLEMA 1:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 1-m \end{vmatrix} = -2m + m^2 = 0$, d'on $m = 0$ i $m = 2$.

Discusió:

- Si $m = 0$, el rang de M és 2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, i el rang de M'

és 3, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. El sistema és incompatible (SI), no té solució.

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN GLOBAL D'ÀLGEBRA I GEOMETRIA

- Si $m = 2$, el rang de M és 2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, i el rang de M' és

també 2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$. El sistema és compatible indeterminat (SCI), té

infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

- Si $m \neq 0$ i 2, el rang de $M = \text{rang de } M' = 3$. Com coincideix amb el nombre d'incògnites, el sistema és compatible determinat (SCD), té una única solució.
- b) Interpretacions geomètriques:
- Si $m = 0$, estem davant de tres plans que es tallen dos a dos segons rectes, o bé, d'una recta paral·lela a un pla.
 - Si $m = 2$, estem davant de tres plans que es tallen segons una recta, o bé, d'una recta que està continguda en un pla.
 - Si $m \neq 0$ i 2, estem davant de tres plans es tallen en un punt, o bé, d'una recta que talla a un pla en un punt.

PROBLEMA 2:

- a) Com $\vec{u} = (2,1,3)$ i $\vec{v} = (4,2,5)$, tenim:

$$\cos \alpha = \frac{8 + 2 + 15}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{16+4+25}} = \frac{25}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{45}} = 0,996. \text{ D'aquí que } \alpha = 5,11^\circ.$$

- b) Com $\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$ i $\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, ja que $\vec{PQ} = (5,0,1)$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,

les dues rectes es creuen en l'espai.

$d(r,r') = d(P,\pi)$ on π és el pla que conté a r' i és paral·lel a r , i $P(-2,-1,0)$ és un punt de la recta r .

Anem a determinar l'equació del pla π . El seu vector característic és el producte vectorial dels vectors directors de les rectes, així doncs, com $\vec{u} = (2,1,3)$ i $\vec{v} = (4,2,5)$, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-1,2,0)$, d'on l'equació del pla és $-x + 2y + D = 0$. Com aquest pla conté al punt $Q(3,-1,1)$ de r' , deduïm que $D = 5$, i aquesta equació és $-x + 2y + 5 = 0$.

$$d(P,\pi) = \frac{|2 - 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 0}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ u.}$$