

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
IES L'ALZINA

RESOLUCIÓ DE L'EXAMEN GLOBAL D'ANÀLISI

QÜESTIONS:

Q1. Com $(1, -2)$ és del gràfic de la funció $f(x) = 2x^2 + ax + b$, tenim que $f(1) = 2 + a + b = -2$, d'on $a + b = -4$.

Com aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x_0 = 2$, tenim que:

$f'(x) = 4x + a$, d'on $f'(2) = 8 + a = 0$, i d'aquí $a = -8$.

Substituint el valor d' a en l'equació anterior, tenim que $b = 4$.

L'expressió de la funció és: $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$.

Q2. Per tal que la recta tangent en un punt del gràfic de $f(x) = x \cdot \ln x$ formi un angle de 45° amb el semieix positiu OX, hem d'imposar que:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 1 = \tan 45^\circ,$$

d'on $\ln x = 0$, i d'aquí $x = 1$.

Les coordenades del punt són: $(1, 0)$ i l'equació de la recta tangent és: $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, és a dir $y = x - 1$.

Q3. És una integral que es resol pel mètode d'integració per parts. Fent:

$f(x) = 3x - 2$, $f'(x) = 3$

$g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$, tenim:

$$\int_0^2 (3x - 2) \cdot e^x dx = \left[(3x - 2) \cdot e^x \right]_0^2 - \int_0^2 3 \cdot e^x dx = 4e^2 + 2 - \left[3 \cdot e^x \right]_0^2 = 4 \cdot e^2 + 2 - (3 \cdot e^2 - 3) = e^2 + 5$$

Q4. Com $F(x) = \int \frac{2x}{x+3} dx = \int \frac{2x+6-6}{x+3} dx = \int \left(2 - \frac{6}{x+3} \right) dx = 2x - 6 \cdot \ln|x+3| + C$ i aquesta

funció s'anul·la quan $x = -2$, tenim: $F(-2) = -4 - 6 \cdot \ln 1 + C = -4 + C = 0$, d'on $C = 4$.

La funció primitiva és: $F(x) = 2x - 6 \cdot \ln|x+3| + 4$

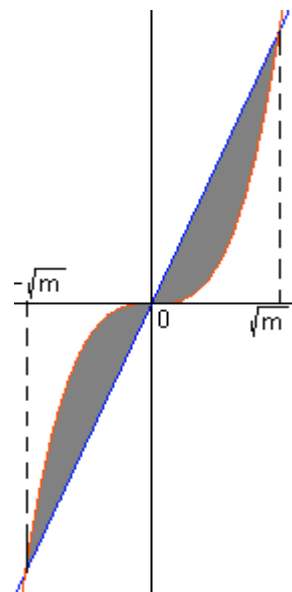
Q5. Com $m > 0$, el dibuix adjunt ens dóna el recinte del pla limitat per la corba $y = x^3$ i la recta $y = mx$. Per determinar els límits d'integració, hem igualat les expressions de les dues funcions, obtenint: $x^3 = mx$, d'on $x \cdot (x^2 - m) = 0$, equació que té com a solucions:

$$x = 0 \text{ i } x = \pm \sqrt{m}$$

En el gràfic s'observa que l'àrea és el resultat de sumar l'àrea de dos recintes d'iguals i simètrics, d'aquí que:

$$A = \int_0^{\sqrt{m}} (mx - x^3) dx = 2 \cdot \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{m}} = 2 \cdot \left[\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{4} \right] = \frac{m^2}{2} = 8,$$

d'on $m^2 = 16$, i d'aquí $m = 4$.



PROBLEMES:

P1. Com $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$, tenim:

a) Punts de tall als eixos de coordenades:

Eix OY: $f(0) = 1$, el punt de tall a l'eix d'ordenades és (0,1).

Eix OX: $f(x) = 0$, d'on $\frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} = 0$, i d'aquí obtenim l'equació $x^2 - 2x + 1 = 0$, que té com a única solució $x = 1$. El punt de tall a l'eix d'abscisses és (1,0).

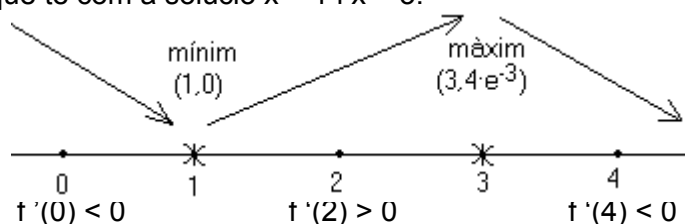
No té asímptotes verticals, ja que el Df = R.

Com $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, tenim una asímptota horitzontal per la dreta d'equació $y = 0$.

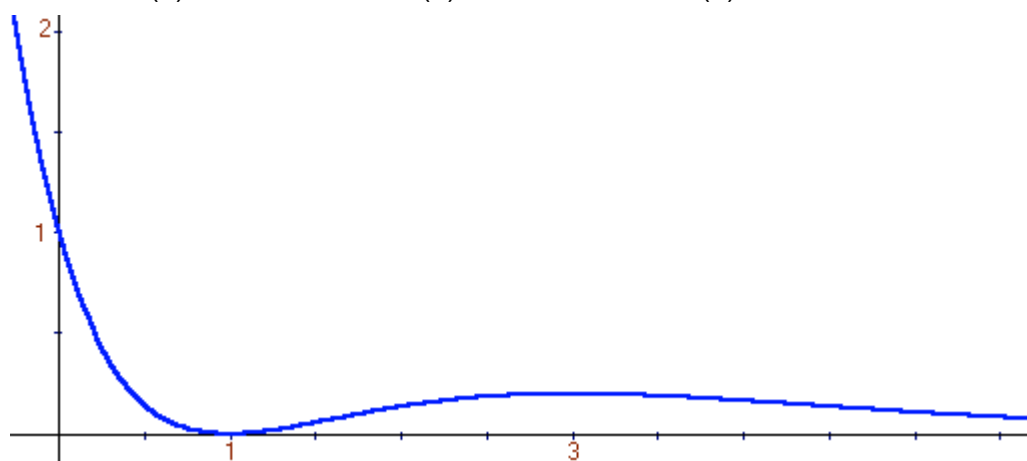
Com $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} = \frac{\infty}{0} = \infty$, no tenim asímptota horitzontal per l'esquerra, d'aquí que podria haver una asímptotes obliqües per l'esquerra, però com...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{-\infty}{0} = \infty, \text{ no en tenim.}$$

b) $f'(x) = \frac{(2x - 2) \cdot e^x - (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x} = 0$, tenim que $x^2 - 4x + 3 = 0$, equació que té com a solució $x = 1$ i $x = 3$.



c)



P2. Com $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 50$, tenim que $h = \frac{50}{\pi \cdot r^2}$, i d'aquí que:

$$A = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{50}{\pi \cdot r^2} = \pi \cdot r^2 + \frac{100}{r} \text{ i } A' = 2\pi \cdot r - \frac{100}{r^2} = 0, \text{ d'on } 2\pi \cdot r^3 = 100, \text{ i } r \approx 2,52 \text{ m}$$

Com $A'(2,5) < 0$ i $A'(2,6) > 0$, tenim un mínim per aquest valor de r , així doncs, les dimensions del dipòsit són: $r \approx 2,52 \text{ m}$ i $h \approx 2,52 \text{ m}$. Es tracta d'un dipòsit cilíndric d'altura igual al radi base.