

QÜESTIÓ 1:

a) Continuitat en $x = 0$:

1. $f(0) = e^0 = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{kx} = e^0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$, per tant és continua en $x = 0$ per a qualsevol valor de k .

b) Com $f'(x) = \begin{cases} e^{kx} \cdot k & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, tenim que $f'(0^-) = e^0 \cdot k = k$ i que $f'(0^+) = 2$.

Perquè aquesta funció sigui derivable en $x = 0$, $k = 2$.

QÜESTIÓ 2:

De $f'(x) = \frac{1 \cdot (3x + 4) - x \cdot 3}{(3x + 4)^2} = \frac{4}{(3x + 4)^2} = 1$, obtenim que $4 = (3x + 4)^2$ i, d'aquí les solucions

$x = -2$ i $x = -2/3$. Per tant, els punts són $(-2/3, -1/3)$ i $(-2, 1)$.

QÜESTIÓ 3:

De $F(x) = \int x \cdot \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot (x^2 - 1)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$ i de

$F(2) = 0$, tenim que $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2^2 - 1)^3} + C = 0$, és a dir: $C = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{27} = -\sqrt{3}$.

La funció primitiva és: $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - 1)^3} - \sqrt{3}$.

QÜESTIÓ 4:

Resolent l'equació $mx = mx^2$, tenim que $x = 0$ i $x = 1$. Com l'àrea compresa és:

$$A = \int_0^1 (mx - mx^2) dx = \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{mx^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{3} \right) - 0 = \frac{m}{6} = 3,$$

d'aquí obtenim que $m = 18$.

QÜESTIÓ 5:

$$\int_0^\pi \frac{3 \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -3 \cdot [\arctag(\cos x)]_0^\pi = -3 \cdot [\arctag(\cos \pi) - \arctag(\cos 0)] = -3 \cdot \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{3\pi}{2}$$

PROBLEMA 1:

a) Punts de tall als eixos de coordenades:

Eix d'ordenades: com $f(0) = 0$, $(0, 0)$ és el punt de tall a l'eix OY.

Eix d'abscisses: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1} = 0$. Aquesta equació té dues solucions, $x = 0$ i $x = 2$,

d'aquí que $(0, 0)$ i $(2, 0)$ siguin els punts de tall a l'eix OX.

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN GLOBAL D'ANÀLISI

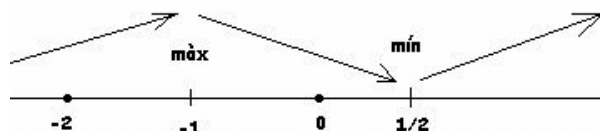
Com $2x^2 + 1 \neq 0$, el domini és $D_f = \mathbb{R}$, en conseqüència, no tenim assímtotes verticals.

Com $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$, tenim una assímtota horitzontal d'equació $y = \frac{1}{2}$.

No tenim assímtotes obliqües, perquè aquesta funció té assímtotes horitzontals.

$$b) f'(x) = \frac{(2x-2) \cdot (2x^2+1) - (x^2-2x) \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x^2+2x-2}{(2x^2+1)^2} = 0, \text{ i d'aquí } 4x^2+2x-2=0,$$

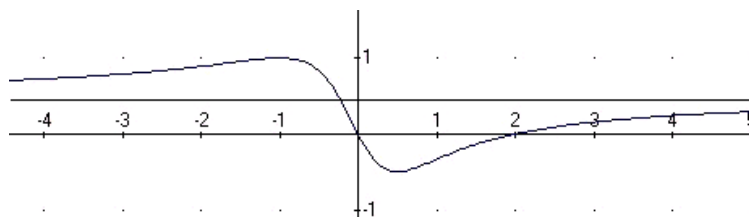
equació que té com a solucions $x = -1$ i $x = \frac{1}{2}$.



Com $f'(-2) > 0$, $f'(0) < 0$ i $f'(1) > 0$, tenim que la funció creix en els intervals $(-\infty, -1)$ i $(\frac{1}{2}, +\infty)$ i decreix en $(-1, \frac{1}{2})$.

Tenim un màxim relatiu en el punt $(-1, 1)$ i un mínim relatiu en el punt $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

c) Gràfic:



PROBLEMA 2:

Si indiquem per $10 - x$ la longitud MQ, el troç restant serà x , i la longitud del segment PM és: $y = \sqrt{25 + x^2}$ pel Teorema de Pitàgores.

La funció cost és: $C = 12 \cdot \sqrt{25 + x^2} + 8 \cdot (10 - x)$

De $C' = 12 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{25 + x^2}} \cdot 2x - 8 = 0$, tenim $\frac{3x}{\sqrt{25 + x^2}} = 2$, i d'aquí $3x = 2 \cdot \sqrt{25 + x^2}$,

equació irracional que té com a solució $x = 2 \cdot \sqrt{5} \approx 4,5$ m.

Com $C'(4) < 0$ i $C'(5) > 0$, tenim que el cost serà mínim si el punt M es troba a 5,5 m de Q i a 6,7 m de P.