

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN PARCIAL D'APLICACIONS DE LES DERIVADES

Exercici 1:

$$f(x) = \frac{x+a}{x^2}$$

a) $f'(x) = \frac{-x-2a}{x^3}$, d'on $f'(2) = \frac{-2-2a}{8} = 0$, per tant $-2-2a = 0$ i d'aquí $a = -1$.

Per saber si és un màxim o un mínim, calculem la segona derivada quan $a = -1$, i tenim:

$$f''(x) = \frac{2x-6}{x^4}.$$

Com $f''(2) = -1/8 < 0$, la funció en $x = 2$ té un màxim de coordenades $(2, 1/4)$

b) $f(1) = 1+a$ i $f'(1) = -1-2a$, d'on l'equació de la recta tangent és:

$$y - (1+a) = (-1-2a) \cdot (x - 1),$$

és a dir: $y = (-1-2a)x + (3a+2)$

Exercici 2:

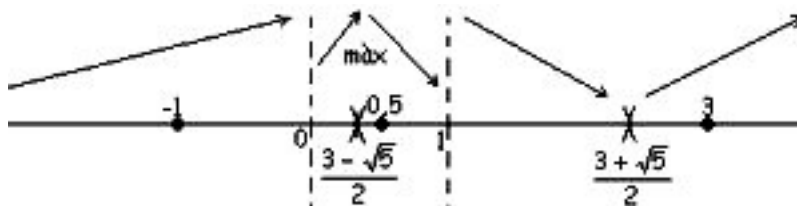
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x}$$

a) La funció no és continua en els punts que anul·len el denominador, per tant, si fem $x^2 - x = 0$, obtenim $x = 0$ i $x = 1$. En aquests punts la discontinuïtat és asimptòtica, ja

que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^2 - x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x^2 - x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x^2 - x} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x^2 - x} = -\infty$.

b) $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 - 3x + 1)}{(x^2 - x)^2} = 0$, d'on $x^2 - 3x + 1 = 0$ ens dona com a solucions $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$,

és a dir, $x_1 = 0,38$ i $x_2 = 2,62$.



ja que: $f'(-1) > 0$, $f'(0,5) < 0$ i $f'(3) > 0$.

D'aquí que la funció sigui creixent en els intervals $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ i

decreixent en els intervals $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$ i $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

c) Asímptotes verticals (AV): $x = 0$ i $x = 1$.

Asímptotes horitzontals (AH): Com $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = +\infty$, tenim una AH per l'esquerra d'equació $y = 0$, però no en tenim per la dreta.

SOLUCIÓ DE L'EXÀMEN PARCIAL D'APLICACIONS DE LES DERIVADES

Asímtotes oblíquues (AO): Com les AH i les AO no es poden donar a l'hora, en aquest cas, podria existir AO per la dreta, però...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 - x^2} = +\infty,$$

per tant, no tenim AO.

Exercici 3:

a) Com $V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi$, tenim que $h = \frac{81}{r^2}$, d'aquí que $S = 2 \cdot r \cdot \frac{81}{r^2} = \frac{162\pi}{r}$.

$$C(r) = 30 \cdot \frac{162\pi}{r} + 45 \cdot 2\pi r^2 = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi r^2$$

b) $C'(r) = \frac{-4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0$. Resolent aquesta equació s'arriba a $r = 3$, i, tenint en compte que $C'(2,9) < 0$ i $C'(3,1) > 0$, tenim un mínim. El cost serà mínim quan el radi de la base sigui de 3 m i l'altura de 9 m.

$$\text{El cost mínim és: } C(3) = \frac{4860\pi}{3} + 90\pi \cdot 3^2 = 2430\pi = 7633,85 \text{ €}.$$