Exercici 1

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3\cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -4 & -2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -4 \\ -3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

Com $|M| = 0$, la matriu no té inversa.

Exercici 2:

Resolent l'equació $|M| = 2a^2 + 2a - 4 = 0$, tenim: $a = 1$ i $a = -2$.
El rang M no potser 3 quan $a = 1$ o $a = -2$. Per aquests valors el rang serà 2, ja que en tots dos casos el determinant $\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & -1 \end{vmatrix}$ és diferent de 0.

Exercici 3:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$;

d'aquí podem deduir que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Demostració per inducció:
Fase 1: Anem a demostrar-ho per a n = 1 i n = 2.

Si n = 1: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, és certa.

Si n = 2: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, és certa.

Fase 2: Hipòtesi d'inducció.

Anem a suposar que és certa fins a n = k, és a dir, que $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3^k - 1 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

Fase 3: Anem a demostrar-ho per a n = k+1.

$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3^k - 1 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3\cdot(3^k - 1) \\ 0 & 3\cdot 3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{k+1} - 1 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$. D'aquí que sigui certa per a qualsevol valor de n.

Exercici 4:

a) Com $I = 3\cdot X - X^2 = X\cdot(3\cdot I - X) = (3\cdot I - X)\cdot X$, tenim que la matriu X té per inversa.
b) la matriu inversa de X és $3\cdot I - X$.

Exercici 5:

Fent primera fila menys segona, segona menys tercera i tercera menys quarta, i després sumant totes les columnes i substituint el resultat a la primera columna, tenim:

$\begin{vmatrix} 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = -(4+x)\cdot(-x)^3 = (4+x)\cdot x^3 = 0$, d'on les solucions són: x = -4 i x = 0.