Exercici 1:

Com $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ = 4, el sistema el podem escriure així: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 - 3w \\ 2x - y + 3z = -1 + w \end{cases}$, i aplicant el mètode de Cramer, tenim:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2-3w & 1 & -1 \\ -1+w & -1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4-6w}{4} = \frac{2-3w}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-3w & -1 \\ 2 & -1+w & 3 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{w}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-3w \\ 2 & -1 & -1+w \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4+5w}{4}$$

Les solucions del sistema són S = $\left\{ \left(\frac{2-3w}{2}, -\frac{w}{4}, \frac{-4+5w}{4}, w \right) / w \in R \right\}$

Exercici 2:

$|M| = m^2 + 3m - 4 = 0$. Resolent l'equació, tenim que m = 1 i m = -4.

Discusió:

- Si m = 1, el rang M =2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 2, i com $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 5, el rang M' = 3. El sistema és incompatible, no té solució.
- Si m = -4, el rang M = 2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ = -3, i com $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 0, el rang M' = 2. El sistema és compatible indeterminat, té infinites solucions.
- Si m $\neq$ 1 i -4, el rang M = 3, rang M' = 3 i el número d'incògnites és 3. El sistema és copatible determinat, té una única solució.

Exercici 3:

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ és un sistema compatible indeterminat, ja que la 3a equació s'obté de sumar la primera i la segona equació, i verifica que la suma dels valors de les tres incognites és 0. Anem a resoldre'l. Com la tercera equació és la suma de la primera i la segona equació, aquesta la podem suprimir. El sistema queda reduït a:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \end{cases}, \text{ o bé, } \begin{cases} x+y=-z \\ x-y=1 \end{cases}.$$

Sumant ambdues equacions, tenim: 2x = 1 - z, d'on x = $\frac{1-z}{2}$. Si substituim l'expressió de x en la segona equació, tenim: y = x - 1 = $\frac{1-z}{2}$-1 = $\frac{-1-z}{2}$.

Les solucions són: S = $\left\{\left(\frac{1-z}{2}, \frac{-1-z}{2}, z\right) / z \in R\right\}$.

Exercici 4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Com |M| = 29, la matriu de coeficients té inversa i el sistema és compatible determinat. Anem a calcular la matriu M-1.

M^t = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i adj M^t = $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 11 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, d'aquí que la matriu inversa sigui:

$$M^{-1} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 5 & 11 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{29} & \frac{-2}{29} & \frac{3}{29} \\ \frac{5}{29} & \frac{11}{29} & \frac{-2}{29} \\ \frac{-3}{29} & \frac{5}{29} & \frac{7}{29} \end{pmatrix}.$$

La solució del sistema és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{29} & \frac{-2}{29} & \frac{3}{29} \\ \frac{5}{29} & \frac{11}{29} & \frac{-2}{29} \\ \frac{-3}{29} & \frac{5}{29} & \frac{7}{29} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$ és a dir, x = 1, y = 2 i z = -1.