

Exercici 1:

Tenim el punt $P(-1,3,2)$, la recta $r_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ i el pla $\pi_1: 2x + y - z + 1 = 0$.

- a) Per trobar el punt Q on la recta r_1 talla al pla π_1 , hem de resoldre el sistema format per les equacions de la recta i del pla, és a dir,

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{z}{2} \\ \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}, \text{ o bé, el sistema equivalent } \begin{cases} 2x - 3z = -4 \\ 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

Resolent-ho per Gauss o per Cramer, obtenim: $Q(0, 1/3, 4/3)$.

Les components del vector $\overrightarrow{PQ}$ són $\overrightarrow{PQ} = (1, -8/3, -2/3)$, i per tant, un vector director de la recta seria $\overrightarrow{u} = (3, -8, -2)$ i l'equació continua de la recta r_2 que passa per P i per Q seria:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-2}{-2}$$

- b) De la recta r_1 podem obtenir un vector director $\overrightarrow{v} = (3, -1, 2)$ i un punt $R(-2, 1, 0)$.

Com $\overrightarrow{RP} = (1, 2, 2)$, podem determinar l'equació del pla que passa per P i és paral·lel als vectors $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{RP}$. L'equació cartesiana d'aquest pla π_2 és:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ és a dir, } -6x - 4y + 7z - 8 = 0$$

Exercici 2:

- a) Els punts P , Q i R estan alineats si els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ són proporcionals, és a dir, $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$.

Com $\overrightarrow{PQ} = (-1, 3, -2)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 3, -4)$ no són proporcionals, deduem que P , Q i R no estan alineats.

- b) Els punts P , Q , R i S són coplanaris si els vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PS}$ són vectors linealment dependents, és a dir, si el determinant format per les components dels tres vectors és 0. Així doncs, com $\overrightarrow{PQ} = (-1, 3, -2)$, $\overrightarrow{PR} = (0, 3, -4)$ i $\overrightarrow{PS} = (-1, 0, 2)$, i el determinant:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

podem garantir que els quatre punts són coplanaris.

L'equació del pla que els conte és $(x, y, z) = (1, -1, 3) + k \cdot (-1, 3, -2) + h \cdot (0, 3, -4)$

Exercici 3:

De la recta r podem obtenir fàcilment un vector director $\vec{u} = (1, 2, -1)$ i un punt $P(-1, 0, -3)$, i de la recta r' podem obtenir dos punts fent:

Si $y = 0$, $x = 1$ i $z = 1$: $Q(1, 0, 1)$

Si $y = 1$, $x = 0$ i $z = 2$: $R(0, 1, 2)$

Definim el vector $\vec{QR} = (-1, 1, 1)$ que és un vector director de la recta r' , i considerem el vector $\vec{PQ} = (2, 0, 4)$. Com el $\text{rang}(\vec{u}, \vec{QR}) = 2$, ja que els dos vectors no són proporcionals, i $\text{rang}(\vec{u}, \vec{QR}, \vec{PQ}) = 3$, ja que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

podem assegurar que les dues rectes es creuen en l'espai.

Exercici 4:

Igualant a 0 el determinant de la matriu de coeficients, tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ d'on } m \cdot (m^2 - 1) = 0, \text{ és a dir, } m = 0, m = 1 \text{ i } m = -1.$$

Discussió del sistema pels diferents valors de m :

- Si $m = 0$, la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, i d'aquí podem deduir fàcilment

que el rang $M = 2$ i el rang $M' = 3$, és a dir, el sistema és incompatible, es tracta doncs de **dos plans paral·lels tallats per un tercer**, o bé, d'**una recta paral·lela a un pla**.

- Si $m = 1$, la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, i d'aquí podem deduir fàcilment

que el rang $M = 2$ i el rang $M' = 2$, és a dir, el sistema és compatible indeterminat, es tracta doncs de **tres plans que es tallen segons una recta**, o bé, d'**una recta continguda en un pla**.

- Si $m = -1$, la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, i d'aquí podem deduir

fàcilment que el rang $M = 2$ i el rang $M' = 2$, és a dir, el sistema és compatible indeterminat, es tracta doncs de **tres plans que es tallen segons una recta**, o bé, d'**una recta continguda en un pla**.

- Si $m \neq 0, 1$ i -1 , rang $M = 3$ i el rang $M' = 3$, és a dir, el sistema és compatible determinat, es tracta doncs de **tres plans que es tallen en un punt**, o bé, d'**una recta que talla a un pla en un punt**.