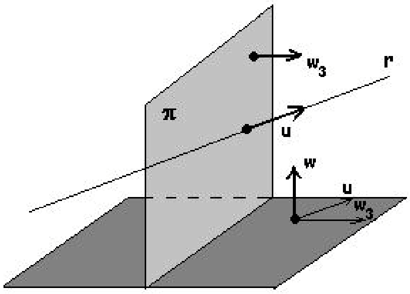
Exercici 1:



a) El vector director de r s'obté com a producte vectorial dels vectors característics dels dos plans que la defineixen. Així doncs, com $\vec{w}_1 = (1,1,-1)$ i $\vec{w}_2 = (2,1,1)$, tenim: $\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = (2,-3,-1)$.

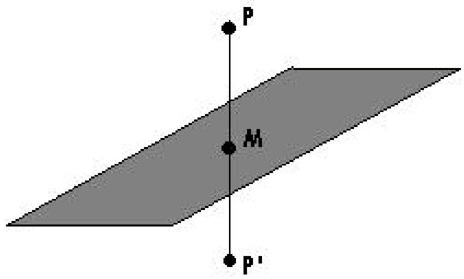
El vector característic $\vec{w}$ del pla que se'ns demana és el producte vectorial del vector director $\vec{u}$ i del vector característic del pla π, és a dir, de $\vec{u} = (2,-3,-1)$ i $\vec{w}_3 = (2,1,-1)$, aleshores: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w}_3 = (4,0,8)$, i per tant el pla pertany al feix de plans:

$$4x + 8z + D = 0.$$

Com el pla passa pel punt P(1,2,-1), tenim que: $4 + 8\cdot(-1) + D = 0$, d'on $D = 4$.
Així doncs el pla és $4x + 8z + 4 = 0$, o bé, $x + 2z + 1 = 0$.

b) $\sin \alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}_3}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}_3|} = \dfrac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0{,}2182$, d'on $\alpha = 12{,}6^\circ$.

Exercici 2:



El pla que conté A(1,1,0), B(1,0,1) i C(2,1,-1) està definit pels vectors $\vec{AB} = (0,-1,1)$ i $\vec{AC} = (1,0,-1)$ i el seu vector característic és $\vec{w} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1,1,1)$.

El pla pertany a la família de plans $x + y + z + D = 0$, i com passa per A(1,1,0), tenim que $D = -2$, i el pla és: $x + y + z - 2 = 0$.

La recta perpendicular al pla que passa pel punt P(-2,3,0) és $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 3 + k \\ z = k \end{cases}$ i el punt de tall de la recta i el pla s'obté de resoldre el sistema $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 3 + k \\ z = k \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

De substituir les expressions de x, y i z en l'equació del pla sòbté que k = 1/3, i al substituir aquest valor de k en les expressions anteriors, obtenim que M(-5/3,10/3,1/3).

Com M és el punt mig del segment PP', tenim que:

M(-5/3,10/3,1/3) = $\left(\dfrac{-2 + x_0}{2}, \dfrac{3 + y_0}{2}, \dfrac{0 + z_0}{2}\right)$, i d'aquí s'obté que el punt simètric de P és P(-4/3,11/3,2/3).

Exercici 3:

a) Com P(0,01), i Q(1,1,0) i $\vec{u}$ = (2,-1,1) són un punt i el vector director de la recta, tenim: $\vec{QP}$ = (-1,-1,1), i com $\vec{u} \wedge \vec{QP}$ = (0,-3,-3), aplicant la fórmula de la distància d'un punt a una recta, tenim:

$$d(P,r) = \frac{/\vec{u} \wedge \vec{QP}/}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{0+9+9}}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{3}\ u.$$

b) Com $\vec{AB}$ = (2,-1,-2), $\vec{AC}$ = (1,-1,-1) i $\vec{AD}$ = (3,-2,0), tenim que:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} u^3.$$

Exercici 4:

El vector director de r és el producte vectorial de $\vec{w}_1$ = (1,1,0) i $\vec{w}_2$ = (1,0,-1), és a dir:

$\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2$ = (-1,1,-1) i un punt és P(0,0,0).

Observem que el rang($\vec{u}, \vec{v}$) = 2, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, i que com $\vec{PQ}$ = (1,0,-1), tenim que el rang ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}$) = 3 sempre que $\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + m \neq 0$.

D'aquí que si m ≠ -3, les dues rectes es creuen en l'espai. Sota aquesta hipòtesis, el pla que conté a r i és paral·lel a r' és:

$$\begin{cases} x = -k + mh \\ y = k + 2h \\ z = -k - h \end{cases}$$