

CÀLCUL DIFERENCIAL I INTEGRAL

EXERCICI 1

- a) Punts de tall als eixos de coordenades.

Eix OY: $f(0) = 0$, per tant el punt de tall a l'eix OY és (0,0).

Eix OX: $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2} = 0$, d'on $x^3 + x^2 = 0$, equació que té com a solucions $x = 0$ i $x = -1$, per tant els punts de tall a l'eix OX són (0,0) i (-1,0).

- b) Asímtotes.

AV: Com $x^2 - 2 = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$ són les asímtotes verticals.

AH: Com $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2} = \pm\infty$, no tenim asímtotes horitzontals.

AO: Com $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 2x} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2} = 1$,
l'asímtota obliqua té per equació $y = x + 1$.

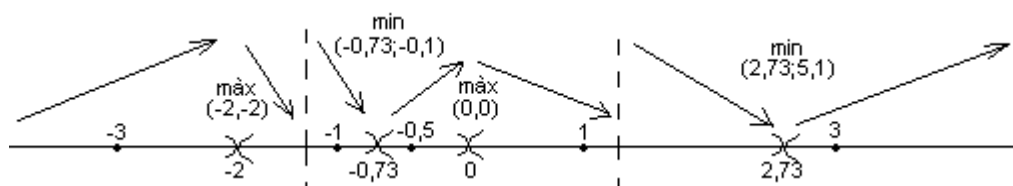
- c) Creixement i decreixement. Extrems relatius.

$f'(x) = \frac{x^4 - 6x^2 - 4x}{(x^2 - 2)^2} = 0$, d'on $x = 0$, o bé, $x^3 - 6x - 4 = 0$. Per resoldre l'equació de 3r grau fem servir la regla de Ruffini, així tenim que:

	1	0	-6	-4
-2		-2	4	4
	1	-2	-2	0

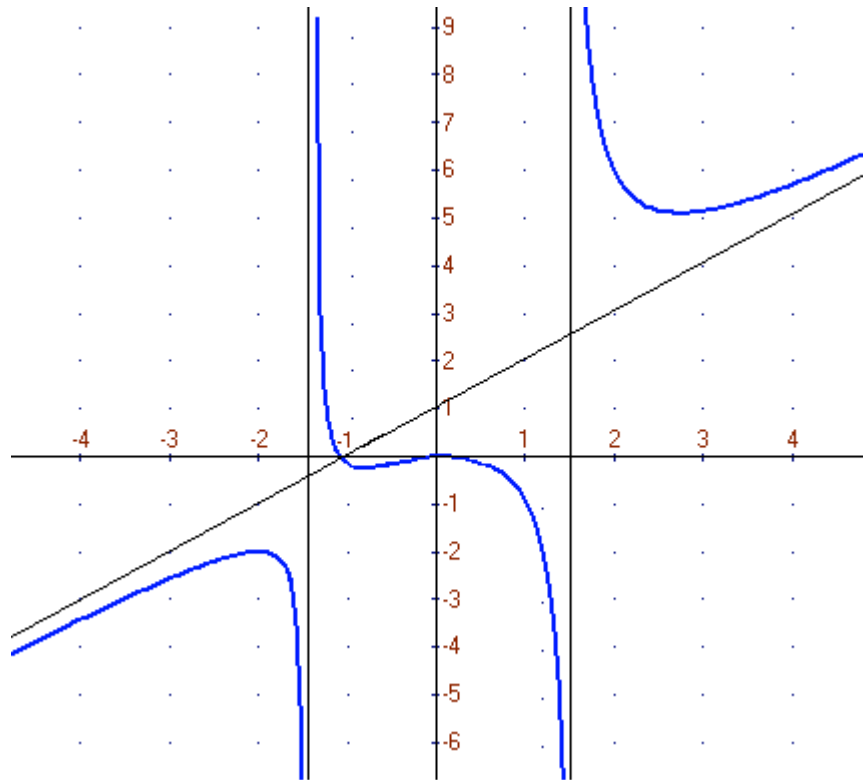
$x = -2$ és una altra solució, i resolent l'equació $x^2 - 2x - 2 = 0$ obtenim dues més: $x = 2,73$ i $x = -0,73$.

Tenim doncs, que:



ja que: $f'(-3) > 0$; $f'(-1) < 0$; $f'(-0,5) > 0$; $f'(1) < 0$ i $f'(3) > 0$.

d) Gràfic.



EXERCICI 2

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Al ser la recta tangent paral·lela a la recta $y = -x + 5$, el pendent és -1 , d'aquí tenim que $\frac{2x}{x^2 + 1} = -1$, d'on $2x = -x^2 - 1$, és a dir, $x^2 + 2x + 1 = 0$, equació que té una única solució $x = -1$.

Com $f(-1) = \ln 2$, l'equació de la recta tangent és: $y - \ln 2 = -1 \cdot (x + 1)$, d'on $y = -x + (-1 + \ln 2)$.

b) Com el pendent és -1 , tenim que $\tan \alpha = -1$, d'on $\alpha = 135^\circ$.

EXERCICI 3

a) $\int_1^e \frac{1}{x \cdot \sqrt{1 - \ln^2 x}} dx = [\arcsin(\ln x)]_1^e = \arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

b) De $-x^2 + ax = x$, tenim que $-x^2 + (a - 1)x = 0$, equació que té com a solucions $x = 0$ i $x = a - 1$.

L'àrea compresa és $A = \int_0^{a-1} -x^2 + (a-1)x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + (a-1) \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^3}{6} = \frac{4}{3}$, d'aquí

que $(a - 1)^3 = 8$, d'on $a - 1 = 2$, i d'aquí que $a = 3$.

ÀLGEBRA LINEAL I GEOMETRIA DE L'ESPAI

EXERCICI 4

a) $X = A^{-1} \cdot (\text{Id} - B)$,

$$\text{Id} - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anem a calcular A^{-1} :

$$|A| = 3, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{i per tant, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Com $\begin{vmatrix} -a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a$, A té inversa si $a \neq 0$.

$$\text{Com } A^t = \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & -a \end{pmatrix}, \text{ tenim: } A^{-1} = -\frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICI 5

$$\begin{vmatrix} 2 & m & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix} = -12 - 3m = 0, \text{ d'on } m = -4.$$

- Si $m = -4$, $\text{rang } M = 2$ i el $\text{rang } M' = 3$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. El sistema és incompatible, no té solució. Estem davant d'un pla que talla a dos plans paral·lels.
- Si $m \neq -4$, el $\text{rang } M = \text{rang } M' = 3$, i el nombre d'incògnites és 3. Estem davant d'un sistema compatible determinat, té una única solució. Es tracta de tres plans que es tallen en un punt.

EXERCICI 6

a) El vector director de la recta és: $\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = (-3, 1, 2)$, on $\vec{w}_1 = (1, -1, 2)$ i $\vec{w}_2 = (0, 2, -1)$.

El vector característic o associat al pla que ens demanen és: $\vec{w}' = \vec{u} \wedge \vec{w} = (-3, -1, -4)$, on $\vec{w} = (1, 1, -1)$.

El pla pertany a la família de plans: $-3x - y - 4z + D = 0$, però sabem que conté a la recta, i en conseqüència a qualsevol punt d'ella. Com $P(-2,0,1)$ és de la recta, tenim:

$$-3 \cdot (-2) - 0 - 4 \cdot 1 + D = 0, \text{ d'on } D = -2$$

l'equació és: $-3x - y - 4z - 2 = 0$, o bé, $3x + y + 4z + 2 = 0$.

- b) Com $\vec{u} = (2, -1, 0)$ és el vector director de la recta, també serà el vector característic o associat a qualsevol pla perpendicular a ella. Aquests plans pertanyen a la família de plans $2x - y + D = 0$. Com el pla ha de passar pel punt $P(3,2,1)$, tenim: $2 \cdot 3 - 2 + D = 0$, d'on $D = -4$.

El pla perpendicular a la recta que passa per P és: $2x - y - 4 = 0$.

Aquest pla talla a la recta en un punt M que serà el punt mig del segment PP' , on P' és el punt simètric de P respecte de la recta.

Per trobar les coordenades de M , resoldrem el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x = 2k \\ y = 1 - k \\ z = -1 \end{cases}$$

on la recta l'hem expressat en forma paramètrica. Substituint les expressions de x , y i z en el pla tenim: $2 \cdot 2k - (1 - k) - 4 = 0$, d'on $k = 1$, i les coordenades de M són: $M(2,0,-1)$.

$$\text{Com } M(2,0,-1) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+1}{2} \right), \text{ tenim: } \begin{cases} \frac{x+3}{2} = 2 \\ \frac{y+2}{2} = 0 \\ \frac{z+1}{2} = -1 \end{cases}, \text{ d'on } x = 1, y = -2 \text{ i } z = -3.$$

Les coordenades del punt simètric són: $P'(1, -2, -3)$.