

CÀLCUL DIFERENCIAL I INTEGRAL

EXERCICI 1

$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, justifiqueu la veracitat o falsedat de les afirmacions següents:

a) f continua en $x = 0$ és certa, ja que:

1. $f(0) = e^0 = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1$

b) f derivable en $x = 0$ és falsa, ja que:

$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, i aquesta funció no és derivable, ja que $f'(0^+) = 2$ i $f'(0^-) = 1$ són diferents.

EXERCICI 2

a) Per trobar els límits d'integració hem de resoldre l'equació $x = x^2 - 2x$, que té com a solucions $x = 0$ i $x = 3$. Com la paràbola queda per sota del gràfic de la recta entre 0 i 3, tenim:

$$A = \int_0^3 (x - (x^2 - 2x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} u^2.$$

b) $\int_1^e \frac{3}{x \cdot (1 + \ln x)} dx = 3 \cdot [\ln|1 + \ln x|]_1^e = 3 \cdot [\ln|1 + \ln e| - \ln|1 + \ln 1|] = 3 \cdot \ln 2.$

EXERCICI 3

Els punts de tall als eixos de coordenades són:

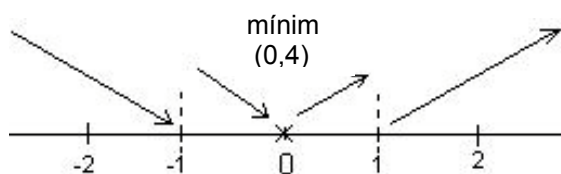
Eix OY: $f(0) = 4$, d'aquí que el punt de tall a l'eix d'ordenades sigui (0,4).

Eix OX: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0$, d'aquí que $x^2 - 4 = 0$, és a dir, $x = \pm 2$, i els punts de tall a l'eix d'abscisses siguin (2,0) i (-2,0).

Del $Df = R - \{1, -1\}$, deduem que aquesta funció té dues assíptotes verticals: $x = 1$ i $x = -1$,

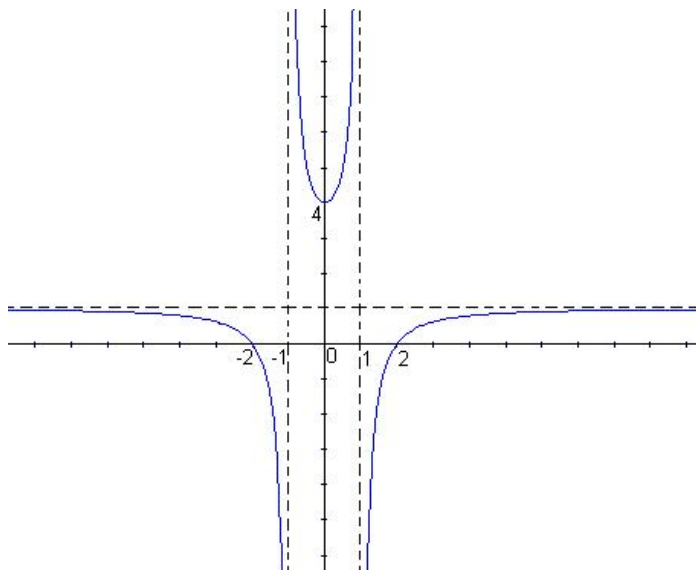
i del $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1$, deduem que té una assíptota horitzontal d'equació $y = 1$. Aquesta funció no pot tenir assíptotes obliqües perquè ja té assíptotes horitzontals.

De $f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2} = 0$, deduem que $x = 0$, per tant, tenim:



ja que $f'(-2) < 0$ i $f'(2) > 0$.

El gràfic és:



ÀLGEBRA LINEAL I GEOMETRIA DE L'ESPAI

EXERCICI 4

De $A \cdot X = B^2 - A$, tenim que $X = A^{-1} \cdot (B^2 - A)$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B^2 - A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Com $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$, existeix la matriu inversa d'A.

Com $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, la matriu d'adjunts d' A^t és $\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i la matriu inversa és:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

EXERCICI 5

a) El vector director de la recta és el producte vectorial del vector director de la recta que ens donen i el vector característic del pla. Així doncs, tenim:

$$\vec{u} = (1, -2, 0) \wedge (0, 1, -1) = (2, 1, 1) \quad \text{i} \quad \vec{w} = (1, 1, -1), \text{ d'on } \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} = (2, -3, -1).$$

Com la recta passa pel punt $P(1, 2, 0)$, tenim que la seva equació és:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-1}$$

RESOLUCIÓ DE L'EXÀMEN DE SUFICIÈNCIA

- b) El vector característic del pla és el producte vectorial del vector director de la recta i del vector característic del pla que ens donen. Així doncs, tenim:

$\vec{u} = (1, -1, 2)$ i $\vec{w} = (1, -1, 1)$, d'on $\vec{w}' = \vec{u} \wedge \vec{w} = (1, 1, 0)$, i l'equació del pla és $x + y + D = 0$. Com passa pel punt $P(1, -1, 0)$, tenim que $D = 0$, i d'aquí $x + y = 0$.

EXERCICI 6

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & -1 \\ -1 & 2 & m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m + 3 = 0$, equació que té com a solució $m = -1$ i $m = 3$.

- Si $m = -1$, el rang $M = 2$ i el rang $M' = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. En

aquest cas, el sistema és compatible indeterminat (SCI), té infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

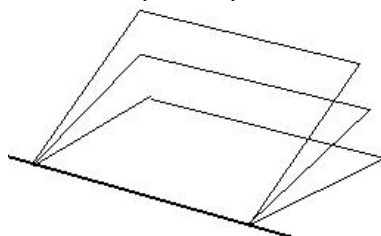
- Si $m = 3$, el rang $M = 2$ i el rang $M' = 3$, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. En

aquest cas, el sistema és incompatible (SI), no té solució.

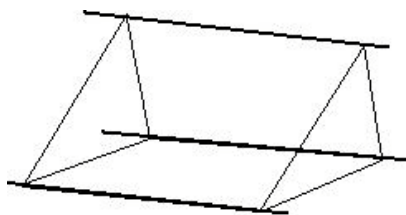
- Si $m \neq -1$ i 3 , el rang $M = 3$ i rang $M' = 3$. El sistema és compatible determinat (SCD), té una única solució.

- b) Interpretació geomètrica:

- Si $m = -1$, estem davant de tres plans que es tallen segons una recta.



- Si $m = 3$, estem davant de tres plans que es tallen dos a dos segons rectes.



- Si $m \neq -1$ i 3 , estem davant de tres plans que es tallen en un punt.

