

**DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
IES L'ALZINA**

RESOLUCIÓ DE L'EXAMEN DE DERIVADES I APLICACIONS DE LES DERIVADES

1a Part

1. a) $f(x) = [\ln(\sqrt{2+x} + x^2)]^5$

$$f'(x) = 5 \cdot [\ln(\sqrt{2+x} + x^2)]^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x} + x^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2+x}} + 2x \right),$$

$$\text{d'on } f'(-1) = 5 \cdot (\ln 2)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{2} \right) = \frac{-15}{4} \cdot (\ln 2)^4 \approx -0,8656.$$

b) L'únic punt de tall del gràfic de $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ amb l'eix d'abscisses és (1,0), ja que

de $f(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} = 0$, i d'aquí $x^3 - 1 = 0$, equació que té una única solució, $x = 1$.

Com $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$, tenim $f'(1) = 3$.

L'equació de la recta tangent en (1,0) és: $y - 0 = 3 \cdot (x - 1)$,
és a dir, $y = 3x - 3$.

2. a) Com $f(x) = \frac{mx+1}{x^2}$, tenim que $f'(x) = \frac{m \cdot x^2 - (mx+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-m \cdot x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-m \cdot x - 2}{x^3}$

$$\text{Quan } x = -1, \text{ tenim: } f'(-1) = \frac{-m \cdot (-1) - 2}{(-1)^3} = -m + 2 = 0, \text{ d'on } m = 2.$$

b) No podem aplicar el Teorema de Bolzano perquè la funció $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$, no és continua en $x = 0$ i per tant no és continua en l'interval $[-1,1]$.

3. a) No és cert, només cal comprovar que la funció $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ és continua en $x = 0$, però no derivable en aquest punt.

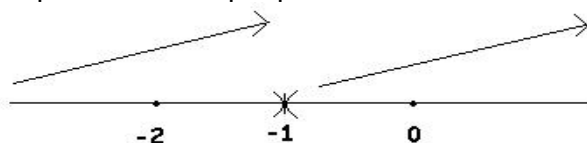
b) La funció $f(x) = x^3 + x + 1$ és sempre continua.

Com $f(0) > 0$ i $f(-1) < 0$, podem aplicar el Teorema de Bolzano en l'interval $[-1,0]$, i per tant l'equació té solució. Com $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, aquesta funció és creixent i només talla a l'eix d'abscisses en un únic punt, per tant, la solució és única.

Com $f(-0,6) > 0$ i $f(-0,7) < 0$, la solució es troba dins l'interval $(-0,7;-0,6)$.

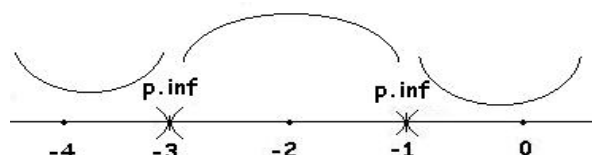
Com $f(-0,68) > 0$ i $f(-0,69) < 0$, la solució es troba dins l'interval $(-0,69;-0,68)$ i per tant aquesta solució té garantida una exactitud fins a la centèsima.

4. a) Com $f(x) = (1 + x^2) \cdot e^x$, tenim: $f'(x) = 2x \cdot e^x + (1 + x^2) \cdot e^x = (1 + 2x + x^2) \cdot e^x$.
Fent $f'(x) = 0$, tenim que $x = -1$. D'aquí que:



ja que $f'(-2) > 0$ i $f'(0) > 0$. Per tant, la funció és sempre creixent.

- b) Fent $f''(x) = (2 + 2x) \cdot e^x + (1 + 2x + x^2) \cdot e^x = (3 + 4x + x^2) \cdot e^x = 0$, tenim que $x = -3$ i $x = -1$ i d'aquí:



ja que $f''(-4) > 0$, $f''(-2) < 0$ i $f''(0) > 0$.

Les coordenades dels punts d'inflexió són $(-3, 10 \cdot e^{-3})$ i $(-1, 2 \cdot e^{-1})$.

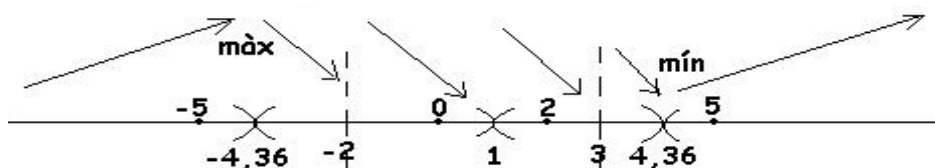
2a Part

1. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2 - x - 6}$.

- Domini: $D_f = \mathbb{R} - \{3, -2\}$, ja que $x^2 - x - 6 = 0$ té com a solució $x = 3$ i $x = -2$.
- Creixement i decreixement. Màxims i mínims:

$$\text{Com } f'(x) = \frac{3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x^2 - x - 6) - (x-1)^3 \cdot (2x-1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x^2 - 19)}{(x^2 - x - 6)^2} = 0,$$

tenim que: $(x-1)^2 \cdot (x^2 - 19) = 0$, d'on $x = 1$ i $x = \pm \sqrt{19}$.



ja que $f'(-5) > 0$, $f'(0) < 0$, $f'(2) < 0$ i $f'(5) > 0$.

- Asíntotes:

AV: $x = 3$ i $x = -2$.

AH: no en té, ja que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^2 - x - 6} = \infty$.

AO: $y = x - 2$, ja que:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{(x^2 - x - 6) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^3 - x^2 - 6x} = 1$$

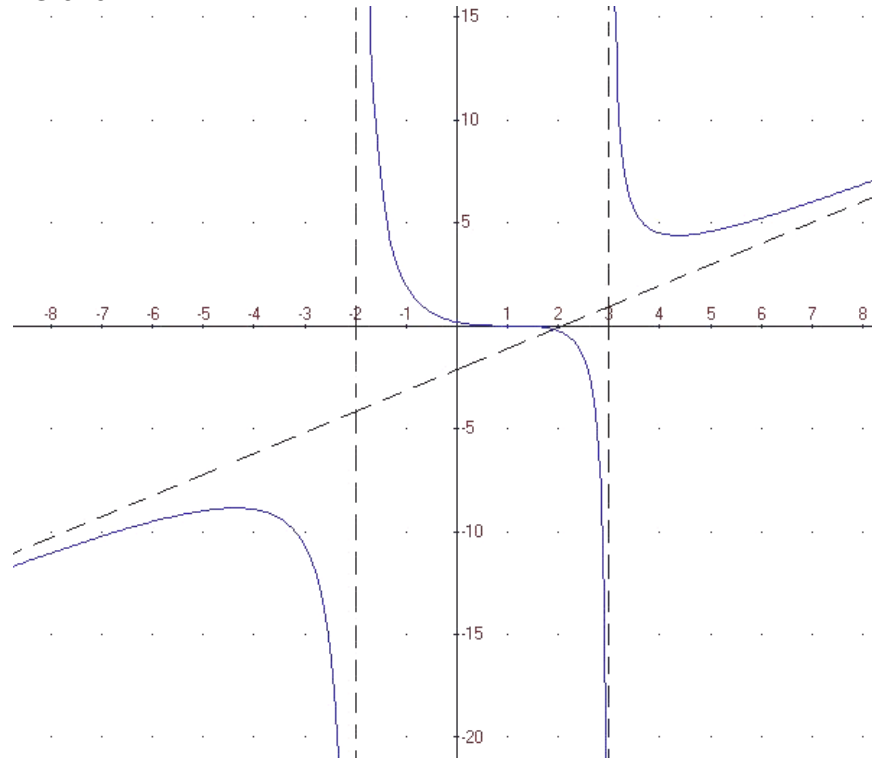
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x^2 - x - 6} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3 - x \cdot (x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 2x - 7}{x^2 - x - 6} = -2$$

- Punts de tall als eixos:

$$f(0) = \frac{1}{6} \rightarrow (0, \frac{1}{6})$$

$$f(x) = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1,0)$$

- Gràfic:



$$2. A_{\text{total}} = 2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot (2xy) + 2xy = 4x^2 + 6xy = 12, \text{ d'on } y = \frac{6 - 2x^2}{3x}.$$

$$V = 2x^2 \cdot y = 2x^2 \cdot \frac{6 - 2x^2}{3x} = 4x - \frac{4}{3} \cdot x^3$$

$$V' = 4 - 4x^2 = 0, \text{ d'on } x = \pm 1 \text{ (només té sentit la solució positiva).}$$

Com $V'' = -8x$, tenim que $V''(1) = -8 < 0$, per tant el volum és màxim quan les dimensions de la base són 1 m d'ample i 2 m de llarg i l'altura és de $4/3$ m.

