DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
IES L'ALZINA

RESOLUCIÓ DE L'EXAMEN DE CÀLCUL INTEGRAL

1.

a) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \sin(\ln x) + C$

b) $\int x^2 \cdot \sqrt{1-2x^3}\,dx = -\frac{1}{6}\cdot\int -6x^2\cdot(1-2x^3)^{1/2}dx = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-2x^3)^{3/2}}{3/2} + C =$

$= -\frac{1}{9}\cdot\sqrt{(1-2x^3)^3} + C$

c) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot \sin(2x) + C$

d) A partir del canvi $t = \sqrt{x}$, tenim que $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. D'aquí que:

$\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}dx = 2\cdot\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)}dx = 2\cdot\int\frac{1}{1+t^2}dt = 2\cdot\text{arctag } t + C = 2\cdot\text{arctag}(\sqrt{x}) + C$

e) Utilitzant el mètode d'integració per parts, tenim:

$f(x) = \ln^2 x \rightarrow f'(x) = 2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 - x \rightarrow g(x) = x - \frac{x^2}{2}$

D'aquí que: $\int (1-x)\cdot \ln^2 x dx = (x - \frac{x^2}{2})\cdot \ln^2 x - \int (x - \frac{x^2}{2})\cdot 2\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}dx =$

$= (x - \frac{x^2}{2})\cdot \ln^2 x - 2\cdot\int (1 - \frac{x}{2})\cdot \ln x \cdot dx = (*)$

Aplicant novament el mètode d'integració per parts, tenim:

$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 - \frac{x}{2} \rightarrow g(x) = x - \frac{x^2}{4}$, d'on:

$(*) = (x - \frac{x^2}{2})\cdot \ln^2 x - 2\cdot\left[(x - \frac{x^2}{4})\cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\cdot(x - \frac{x^2}{4})dx\right] =$

$= (x - \frac{x^2}{2})\cdot \ln^2 x - 2\cdot\left[(x - \frac{x^2}{4})\cdot \ln x - \int (1 - \frac{x}{4})dx\right] =$

$= (x - \frac{x^2}{2})\cdot \ln^2 x - 2\cdot(x - \frac{x^2}{4})\cdot \ln x + 2\cdot(x - \frac{x2}{8}) + C$

f) Descomponent la fracció en fraccions simples, tenim:

$\frac{3x-1}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$

$= \frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2) + B\cdot(x+1)\cdot(x+2) + C\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}$

d'on: $3x - 1 = A\cdot(x - 1)\cdot(x + 2) + B\cdot(x + 1)\cdot(x + 2) + C\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)$

Fent $x = 1$, tenim $2 = 6B$, d'on $B = 1/3$;

fent x = -1, tenim -4 = -2·A, d'on A = 2 i
fent x = -2, tenim –7 = 3·C, d'on C = -7/3.

D'aquí que:

$$\int \frac{3x-1}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{1/3}{x-1}dx + \int \frac{-7/3}{x+2}dx =$$

$$= 2\cdot\ln|x+1| + \frac{1}{3}\cdot\ln|x-1| - \frac{7}{3}\cdot\ln|x+2| + C$$

2. Com F(x) = $\int (x-1)\cdot e^{x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\int (2x-2)\cdot e^{x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2-2x} + C$ i F(0) = 0, tenim:

   $\frac{1}{2}\cdot e^0 + C = 0$, d'on C = $-\frac{1}{2}$.

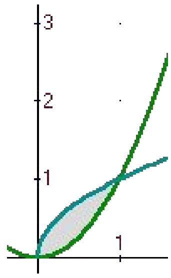
   La funció primitiva és F(x) = $\frac{1}{2}\cdot e^{x^2-2x} - \frac{1}{2}$

3. Com f(x) = $x^3 + mx^2 \geq 0$ dins l'interval [0,2], l'àrea coincideix amb la integral definida, així doncs, tenim:

   $$A = \int_0^2 (x^3 + mx^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + m\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3}\cdot m = 16,$$

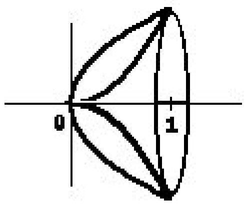
   d'on m = $\frac{9}{2}$.

4. Resolent l'equació $\sqrt{x} = x^2$, tenim que x = 0 i x = 1.
   a) L'àrea compresa pels gràfics de les dues funcions és:



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - 0 = \frac{1}{3}\ u^2$$

   b) El volum s'obté com la diferència de dos volums, així doncs, tenim:



$$V = \pi\cdot\int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right)dx = \pi\cdot\int_0^1 (x - x^4)dx = \pi\cdot\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\cdot(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{3}{10}\pi\ u^3$$