

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
IES L'ALZINA

Examen d'Estadística:
Tema 3: Distribucions de probabilitat

RESOLUCIÓ:

Exercici 1

a) Per tal que sigui una distribució de probabilitat cal que:

$$\sum_i p_i = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{1}{9} = \frac{2+6+3+5+2}{18} = \frac{18}{18} = 1.$$

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/9	1/3	1/6	5/18	1/9
P_i	2/18	8/18	11/18	16/18	1

La funció de distribució serà:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i < 1 \\ \frac{1}{9} & \text{si } 1 \leq x_i < 2 \\ \frac{4}{9} & \text{si } 2 \leq x_i < 3 \\ \frac{11}{18} & \text{si } 3 \leq x_i < 4 \\ \frac{8}{9} & \text{si } 4 \leq x_i < 5 \\ 1 & \text{si } x_i \geq 5 \end{cases}$$

$$b) \mu = \sum_i x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{18} + 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{53}{18} = 2,94$$

$$\sigma^2 = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{5}{18} + 5^2 \cdot \frac{1}{9} - \left(\frac{53}{18}\right)^2 = \frac{183}{18} - \frac{2809}{324} = \frac{485}{324} = 1,50, \text{ d'on}$$
$$\sigma = \sqrt{1,50} = 1,22$$

$$c) P(2 \leq X < 5) = F(4) - F(1) = \frac{16}{18} - \frac{1}{9} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}.$$

Exercici 2

Estem davant d'una distribució Binomial amb $n = 10$ i $p = 0,08$.

$$a) P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,08^1 \cdot 0,92^9 = 0,3777.$$

$$b) P(\text{al menys un defectuós}) = 1 - P(\text{cap defectuós}) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,08^0 \cdot 0,92^{10} = 0,5656.$$

Exercici 3

Estem davant d'una distribució Binomial de paràmetres $n = 400$ i $p = 0,015$. Aquesta distribució es pot aproximar a una distribució de Poisson ja que $p < 0,1$ i $n \cdot p = 200 \cdot 0,015 = 3 < 5$.

$$a) \mu = \lambda = n \cdot p = 3.$$

$$a) P(X = 5) = e^{-3} \cdot \frac{3^5}{5!} = 0,1008.$$

Exercici 4

Els pesos es distribueixen segons una normal de $\mu = 185$ i $\sigma = 7$.

$$a) P(175 < X < 200) = P(-1,43 < Z < 2,14) = 0,9838 - (1 - 0,9236) = 0,9074.$$

$$z_1 = \frac{175 - 185}{7} = -1,43 \quad i \quad z_2 = \frac{200 - 185}{7} = 2,14$$

$$b) P(X > x_i) = 0,1, \text{ d'aquí que } P(X \leq x_i) = P(Z \leq z_i) = 0,9 \rightarrow z_i = 1,28 = \frac{x_i - 185}{7}, \text{ d'on } x_i = 193,96 \text{ g.}$$

Exercici 5

Estem davant d'una distribució Binomial de paràmetres $n = 500$ i $p = 0,4$.

Com $n \cdot p \cdot q = 500 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 120 > 5$, podem aproximar-la a una distribució Normal de mitjana aritmètica $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0,4 = 200$ i desviació estàndard $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{120} = 10,95$.

$$P(225 < X < 230) = P(2,28 < Z < 2,74) = 0,9969 - 0,9887 = 0,0082.$$

$$z_1 = \frac{225 - 200}{10,95} = 2,28 \quad i \quad z_2 = \frac{230 - 200}{10,95} = 2,74$$