

Temari de Matemàtiques

1. Aritmètica i àlgebra

1.1. El conjunts numèrics.

- 1.1.1 Revisió dels conjunts dels nombres naturals, enters i racionals. Operacions.
- 1.1.2. Els nombres irracionals.
- 1.1.3. El conjunt de nombres reals. La recta real. Ordenació. Valor absolut. Distància. Intervals.
- 1.1.4. Estimació i aproximació de quantitats. Truncament i arrodoniment. Errors.
- 1.1.5. Potències i arrels.
- 1.1.6. Notació científica. Operacions amb notació científica.
- 1.1.7. Logaritmes decimals i neperians. Propietats i aplicacions.
- 1.1.8. Ús de la calculadora.

1.2. Polinomis.

- 1.2.1. Expressions polinòmiques amb una indeterminada.
- 1.2.2. Valor numèric.
- 1.2.3. Operacions amb polinomis.
- 1.2.4. Algoritme de Ruffini. Teorema del residu.
- 1.2.5. Arrels i factorització d'un polinomi.
- 1.2.6. Simplificació i operacions amb expressions fraccionàries senzilles.

1.3. Equacions.

- 1.3.1. Equacions de primer grau i segon grau amb una incògnita.
- 1.3.2. Equacions polinòmiques amb arrels enteres.
- 1.3.3. Equacions irracionals senzilles.
- 1.3.4. Sistemes d'equacions amb dues o tres incògnites.
- 1.3.5. Classificació de les equacions i dels sistemes segons les seves solucions.
- 1.3.6. Equacions exponencials i logarítmiques senzilles.
- 1.3.7. Utilització de les equacions i els sistemes en la resolució de problemes.
- 1.3.8. Interès simple i compost.

2. Geometria

2.1. Trigonometria

- 2.1.1. Descripció i propietats elementals de les figures planes i dels cossos elementals. Càlcul d'àrees i volums.
- 2.1.2. Mesures d'angles. Unitats.
- 2.1.3. Raons trigonomètriques d'un angle agut.
- 2.1.4. Relacions fonamentals entre les raons trigonomètriques.
- 2.1.5. Raons trigonomètriques d'angles. Circumferència goniomètrica.
- 2.1.6. Resolució de triangles rectangles i no rectangles.
- 2.1.7. Escales.

2.2 Nombres complexos

- 2.2.1 Necessitat dels nombres complexos.
- 2.2.2. Notació dels nombres complexos.
- 2.2.3. Operacions amb nombres complexos.

2.3. Vectors al pla

- 2.3.1. El pla com a conjunt de punts. Coordenades dels punts del pla.
- 2.3.2. Mòdul, direcció i sentit d'un vector.
- 2.3.3. Components d'un vector. Operacions amb vectors.
- 2.3.4. Angle entre vectors. Paral·lelisme i perpendicularitat.
- 2.3.5. Equacions de la recta. Posició relativa de rectes.
- 2.3.6. Distància entre dos punts i entre un punt i una recta.

3. Funcions i gràfiques

3.1. Funcions

- 3.1.1. Concepte de funció. Diferents formes d'expressar una funció.
- 3.1.2. Imatge. Antiimatge. Domini. Recorregut.
- 3.1.3. Funcions lineals: proporcional / afí / constant.
- 3.1.4. Funció quadràtica. Paràbola.
- 3.1.5. Funcions algèbriques, polinòmiques, racionals i irracionals.
- 3.1.6. Funció exponencial.
- 3.1.7. Continuitat de funcions.
- 3.1.8. Límits puntuals. Límits laterals.
- 3.1.9. Límits cap a infinit.
- 3.1.10. Assímtotes.

3.2. Derivades.

- 3.2.1. Taxa de variació mitjana. Concepte de derivada. Càlcul de derivades de funcions elementals.
- 3.2.2. Equació de la recta tangent a una corba en un punt.
- 3.2.3. Creixement i decreixement.
- 3.2.4. Màxims i mínims.
- 3.2.5. Gràfiques de funcions senzilles.
- 3.2.6. Aplicació del càlcul de derivades de funcions polinòmiques a problemes d'optimització.

4. Estadística i probabilitat

4.1. Estadística descriptiva unidimensional.

- 4.1.1. Variables discretes i contínues.
- 4.1.2. Recompte i presentació de dades. Determinació d'interval·ls i marques de classe.
- 4.1.3. Elaboració i interpretació de taules de freqüències, gràfiques de barres i de sectors, histogrames i polígons de freqüència.
- 4.1.4. Càlcul i interpretació dels paràmetres de centralització i dispersió usuals: mitjana, moda, mediana, recorregut, variància i desviació típica.

4.2. Estadística descriptiva bidimensional.

- 4.2.1. Distribucions bidimensionals. Representacions gràfiques. Núvol de punts. Interpretació de fenòmens a partir de núvols de punts.
- 4.2.2. Dependència funcional i estadística entre dues variables. Estudi intuïtiu de la correlació.

4.3. Probabilitat.

- 4.3.1. Experiments aleatoris i successos.
- 4.3.2. Probabilitat simple i composta.

Material didàctic

Exercis i problemes

1. Aritmètica i àlgebra

1.1. El conjunts numèrics.

1.1.1. Un passatger es troba a la coberta d'un vaixell a 6 m sobre el nivell del mar. A quina distància es troba:

- a) d'un peix que neda a 5 m de profunditat.
- b) d'una finestra del menjador que es troba a 2 m sobre el nivell del mar.
- c) d'un mariner que es troba al pont de comandament, a 8 m de la coberta.
- d) d'un corall del fons del mar que es troba a 98 m de profunditat.

1.1.2. En un dia qualsevol d'un setmana a una localitat de la Cerdanya, les temperatures des de les 8 hores fins a les 13 hores van ser:

Hora	8 h.	9h.	10 h.	11 h.	12 h.	13 h.
Temperatura	-8°	-5°	0°	+3°	+5°	+4°

Quina ha estat la variació de temperatura per a cada hora?.

1.1.3. Un metro inicia el seu recorregut amb 15 persones. En la primera parada, pugen una senyora i un nen; en la segona, baixa una parella de joves enamorats i un avi, i pugen un matrimoni amb el seu fill; en la tercera, no puja ni baixa ningú; mentre que a la quarta parada, baixen un grup de sis soldats i tres noies, i pugen dos estudiants. Finalment, en la penúltima parada, baixa el matrimoni amb el fill, un capella i tres infermeres, i pugen un senyor i una senyora. I així acaba el seu recorregut. Es demana:

a) Completeu la taula adjunta:

Parada	0	1	2	3	4	5	Final
Pugen	15						-
Baixen	-						
Variació							

- b) Observeu la variació que es produeix en la segona parada. A que creus que és deguda?
- c) Quants viatgers arriben al final del recorregut?

1.1.4. Cent polsades són 254 cm. Quantes polsades té un metre?

1.1.5. Una iarda són tres peus i un peu dotze polsades. Quants peus i polsades tenen $\frac{7}{3}$ de iarda?

1.1.6. a) Doneu quatre fraccions equivalents a $\frac{5}{7}$ i transformeu-les en decimals. Què observeu?

b) Podem assegurar que les fraccions $\frac{8}{9}$ i $\frac{24}{25}$ són equivalents? Justifiqueu-vos.

1.1.7. Comproveu que la fracció $\frac{3}{4}$ es troba entre $\frac{5}{7}$ i $\frac{7}{9}$.

Indicació: Reduïu a comú denominador i compareu numeradors.

1.1.8. Transformeu en decimals les fraccions següents i indiqueu quin tipus de decimal en resulta:

$$\frac{13}{8}, \frac{7}{6}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{6}{11}, \frac{5}{7} \text{ i } \frac{136}{99}.$$

1.1.9. Busqueu la fracció generatriu dels números decimals: 3,2; 4,33333... i 7,122222...

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

1.1.10. Considereu els nombres: -5 , 3 , 0 , $\frac{3}{5}$, $-\frac{3}{4}$, 7 , $\frac{21}{9}$, $\sqrt{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- a) Indiqueu si són naturals, enters, racionals, o bé reals.
b) Ordeneu-los de més petit a més gran buscant prèviament, si s'escau, la seva expressió decimal.

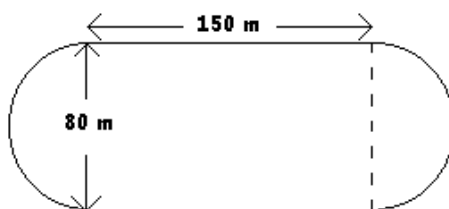
1.1.11. Ordeneu de més petit a més gran els nombres reals: $\sqrt{3}$; $-\frac{2}{3}$; $3-\sqrt{5}$; 2π ; $\frac{17}{90}$ i $\frac{7}{8}$.

1.1.12. Calculeu: a) $\frac{2}{3} - 5 \cdot (\frac{1}{5} + \frac{5}{2} - \frac{3}{10})$ b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{3}{4} : \frac{2}{5}$

- 1.1.13. a) Quina és la longitud de la circumferència que té de diàmetre la unitat?
b) Doneu una aproximació fins a la quarta xifra decimal del nombre que has obtingut.

1.1.14. El preu d'un terreny rectangular de 50,5 metres de llarg a 5,32 €/m² és de 3223,92 €. Quant amida l'ample d'aquest terreny? Arrodoniu el resultat a la centèsima.

1.1.15. Una pista atlètica té la forma i les dimensions que s'indiquen en la figura. Calculeu el perímetre i la superfície del recinte. Arrodoniu els resultats, si es dona el cas, a una xifra decimal.



1.1.16. Arrodoneix fins a la tercera xifra decimal els nombres: $1,6$, $-2,72$ i $0,45678128$. Quin és l'error relatiu expressat en percentatge que estem produïnt en cada cas?

- 1.1.17. a) Donats els intervals $I = (-1,5]$ i $J = [0,7)$, determineu els conjunts $I \cup J$ i $I \cap J$. Són intervals?
En cas afirmatiu, quina és la seva amplitud?
b) Expressen en forma d'intercal el conjunt de nombres reals que siguin més grans que 4, però més petits o iguals a 7.

1.1.18. Simplifiqueu les expressions següents, donant el resultat en forma de potència:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^3}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 16^2} & \text{b) } \frac{3^{-5} \cdot \left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(27^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^2} & \text{c) } \frac{a^{-2} \cdot (a^3)^{\frac{2}{3}}}{\left(a^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}^4} \\ \text{d) } \frac{\left(2^{-4} \cdot 16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-1}}{(2^{-3})^2} & \text{e) } \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^5 : \frac{8 \cdot (2^{-2} \cdot \sqrt[5]{4})}{4^{\frac{-3}{4}}} & \text{f) } \frac{(8^2)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{4}}{128} \end{array}$$

1.1.19. Calculeu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{2} + 21 \cdot \sqrt{2} - 18 \cdot \sqrt{2} & \text{b) } 3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{27} \\ \text{c) } 6 \cdot \sqrt{2} - 8 \cdot \sqrt{8} + 5 \cdot \sqrt{32} - 3 \cdot \sqrt{128} & \text{d) } 2 \cdot \sqrt{48} + 3 \cdot \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{300} \end{array}$$

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

1.1.20. Calculeu:

a) $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}}$

b) $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[6]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^5}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{a \cdot b}}$

1.1.21. Traieu fora del radical tots els factors que puguis:

a) $\sqrt{500}$

b) $\sqrt[3]{880 \cdot a^{14}}$

c) $\sqrt[3]{7203}$

d) $\sqrt[5]{a \sqrt{a^{14}}}$

1.1.22. Doneu en forma de potència de base a:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}}$

b) $\sqrt{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}$

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a \sqrt{a}}}{a^2}$

1.1.23. Expresseu en notació científica el resultat de les operacions següents:

a) $2,003108 \cdot 0,101032$

b) $5,123 : 2,003521$

c) $3,21 \cdot 10^8 + 0,27 \cdot 10^7$

1.1.24. El pes d'un gra d'arròs és 0,00027743 Kg. Quina és la notació científica d'aquest valor? Si l'arrodoniu a 0,00028 Kg, quin error relatiu expressat en percentatge esteu fent?

1.1.25. Aplicant la definició de logaritme, calculeu el valor de x en els casos següents:

a) $\log_2 64 = x$

b) $\log_3 27 = x$

c) $\log_5 \sqrt{5} = x$

d) $\log 0,01 = x$

e) $\log 1000000 = x$

f) $\log_{1/2} 8 = x$

g) $\log_2 x = -1/2$

h) $\log_7 7x = 2$

i) $\log_x 81 = 1/4$

j) $\log_9 x^4 = 2$

k) $\ln x^2 = 4$

l) $\log_5 \sqrt{\frac{1}{25}} = x$

1.1.26. Sabent que $\log 2 = 0,301030$ i que $\log 3 = 0,477121$, calculeu:

a) $\log 12$.

b) $\log 15$

c) $\log \sqrt[5]{6}$

d) $\log \frac{0,16 \cdot \sqrt{6}}{0,3}$

e) $\log 0,006$

f) $\log \frac{1}{6}$

1.1.27. a) Utilitzeu la fórmula del canvi de base per tal de poder determinar, fent ús de la calculadora, el valor de $\log_3 5$.

b) Arrodoniu el resultat anterior fins a la centèsima i determineu l'error comès al considerar aquest nou valor com una bona aproximació del resultat obtingut amb la calculadora.

1.2. Polinomis.

1.2.1. Calculeu la suma i el producte dels polinomis:

a) $p(x) = 9x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ i $q(x) = -3x^2 - x + 2$

b) $p(x) = 3x^2 + 7x$ i $q(x) = 12x^2 - 9x - 1$

c) $p(x) = 3x^4 + 2x^3 + x - 8$ i $q(x) = x^4 - 3x^2 - 9$

1.2.2. Donats els polinomis $p(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ i $q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 2$, calculeu:

a) $p(x) + q(x)$

b) $3 \cdot p(x) - 2 \cdot q(x)$

c) $p(x) \cdot q(x)$

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

1.2.3. Traieu factor comú en les expressions:

a) $8x^3 + 64x^2 - 16x$

c) $2x^3 - 8x^2 + 4$

e) $x \cdot y^3 - x^2 \cdot y^2$

b) $4x^5 - 6x^3 + x^2$

d) $x^7 - 3x^5 + 2x^3$

f) $5x - 10x^3 + 15x^5$

1.2.4. Aplicant els productes notables, calculeu:

a) $(2x - 3)^2$

c) $(x^3 + 2x) \cdot (x^3 - 2x)$

e) $(2x + 3)^2$

b) $(x + 1/2)^2$

d) $(2x^2 + 3) \cdot (2x^2 - 3)$

f) $(3x^2 - 1)^2$

1.2.5. Expressen els polinomis següents com a producte de polinomis de grau 1:

a) $x^2 - 9$

c) $x^2 + 4x + 4$

e) $4x^4 - 25$

b) $x^2 - 6x + 9$

d) $9x^4 + 6x^2 + 1$

f) $x^2 - 9x^6$

1.2.6. Fent us del binomi de Newton, desenvolueu els binomis:

a) $(x + 1)^3$

c) $(x^3 + 5)^4$

e) $(x^2 - 1)^6$

b) $(2x - 1)^4$

d) $(2x + 3)^5$

f) $(3 - x^3)^3$

1.2.7. Calculeu el quocient i el residu de les divisions:

a) $(x^5 + 5x^4 - 6x^2 - 4) : (x^3 + 3x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 1) : (x^2 + x + 1)$

b) $(3x^6 - x^5 + 8x^4 - x^2 + x - 1) : (x^4 - 2x^2)$

d) $(x^4 - 3x^2 + x + 5) : (x^2 - 3x)$

1.2.8. Utilitzeu la Regla de Ruffini per tal de calcular el quocient i el residu de:

a) $(x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2) : (x + 2)$

c) $(5x^3 - 2x^2 + 4x - 5) : (x + 5)$

b) $(3x^5 - x^3 + 3x + 7) : (x - 1)$

d) $(-6x^3 + 4x^2 + 8) : (-2x + 1)$

1.2.9. Calculeu el valor numèric dels següents polinomis per a $x = -1$ i per a $x = 1/2$.

a) $p(x) = 8x^4 - 2x^3 + 9$

c) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + 2x + 5$

d) $p(x) = 3x^4 + 5x^2 - 5x + 2$

1.2.10. Determineu el valor de m per tal que al dividir el polinomi $p(x) = x^5 + x^4 + mx^2 - x + 1$ per $x - 1$ el residu sigui -3 .

1.2.11. Quin valor pren m si sabem que la divisió entre $p(x) = x^3 + mx^2 - 5x + 1$ i $x + 3$ és exacta?

1.2.12. Trobeu les arrels dels següents polinomis i doneu la seva descomposició factorial:

a) $x^2 - 5x + 6$

c) $2x^3 + x^2 - 8x - 4$

e) $x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $x^2 - 3x - 4$

d) $x^4 - 6x^2 + 8$

f) $2x^3 - 7x^2 - 7x + 12$

1.2.13. Trobeu la descomposició factorial dels polinomis:

a) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

c) $q(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

b) $p(x) = 5x^2 + 7x + 2$

d) $r(x) = 3x^3 + 10x^2 + 4x - 8$

1.2.14. Quin és el valor numèric de la fracció algebàrica $\frac{x^3 + 1}{3x^2 + 5x - 1}$ per a $x = -1$?

1.2.15. Simplifiqueu:

a) $\frac{2x^2 + 4x + 2}{8x^2 - 8}$

c) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x}$

b) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

d) $\frac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4}$

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

1.2.16. Calculeu:

a) $\frac{2x}{x-2} + \frac{x^3+x}{x^2-4}$

b) $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1}$

c) $\frac{3x^3+3}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+x}$

d) $\frac{x^2-4}{x^2+3x} : \frac{x+2}{x^2-9}$

1.3. Equacions.

1.3.1. Resoleu les següents equacions de primer grau:

a) $17x - 5 \cdot (3x + 1) - 2x = 123$

b) $6 \cdot (x - 7) + 2 \cdot (4 - 3x) = 17$

c) $\frac{x-1}{2} + 3x = \frac{x}{4} - 2 \cdot (x+1)$

d) $\frac{x+3}{2} - \frac{5x+4}{3} = 2x - 1$

e) $\frac{3x}{2} + \frac{2x+3}{4} = 5 \cdot (x+2)$

e) $\frac{1}{2} \cdot \left(2x + \frac{4}{3} \right) = 1 - 4x$

1.3.2. Un club esportiu ha comprat 24 samarretes i 6 pilotes per un total de 138,60 €. El preu d'una samarreta representa els dos terços del preu d'una pilota. Quant val una samarreta? Quant val una pilota?

1.3.3. Un cert capital dipositat a un banc a un interès del 6% ens ha donat els mateixos interessos que 2400 € al 5%. Calculeu el valor d'aquest capital?

1.3.4. Volem repartir 280 € entre tres amics A, B i C. La part que correspon a A és la meitat de la part de B. La part que li correspon a B és la meitat de la part que li toca a C. Quant li correspon a cadascú?

1.3.5. Resoleu les següents equacions de segon grau:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

b) $(3x+1)(2x+4) = 0$

c) $(x-10)^2 = 256$

d) $(x-1)^2 + x^2 = 1$

e) $x^2 - 16x = 0$

f) $(x^2-4)(x^2+1) = 0$

1.3.6. Resoleu les següents equacions:

a) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

b) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$

c) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$

d) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

e) $x^5 - 32 = 0$

f) $\sqrt{x+7} - x = 1$

1.3.7. Trobeu les dimensions d'un rectangle de perímetre 56 cm i d'àrea 180 cm².

1.3.8. L'edat d'un nen serà d'aquí a 3 anys un quadrat perfecte, i fa 3 anys serà justament l'arrel quadrada d'aquest quadrat. Quants anys té ara?

1.3.9. a) Indiqueu si $x = 0$, $y = 2$ i $z = -3$ és una solució del sistema $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 3y - z = 9 \end{cases}$. Justifiqueu-vos.

b) Doneu una altra solució d'aquest sistema.

1.3.10. Resoleu els següents sistemes d'equacions utilitzant algun dels mètodes tradicionals:

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = -1 \end{cases}$

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

1.3.11. Resoleu pel mètode de Gauss els següents sistemes d'equacions:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + 3z = -4 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases} \end{array}$$

1.3.12. Doneu un exemple de sistema de 3 equacions amb 3 incògnites que sigui compatible determinat, un altre que sigui compatible indeterminat i un altre que sigui incompatible.

1.3.13. Una empresa fabrica tres models de televisors que anomenem A, B i C. El model A necessita passar dues hores a la unitat de muntatge, el model B i el C, només una. El model A ha de passar una hora a la unitat d'acabats, el model B, dues i el model C, tres. En total s'han produït 14 aparells de televisió. La unitat de muntatge ha treballat 25 hores i la unitat d'acabats, 18. Quants televisors de cada tipus s'han produït?

1.3.14. En una granja hi ha porcs, vaques i cavalls, en total 54 animals. El nombre de vaques representa $\frac{3}{4}$ del nombre de porcs, i el de cavalls, $\frac{2}{3}$ del de vaques. Quants animals hi ha de cada classe a la granja?

1.3.15. Un constructor compra tres parcel·les i paga 150 €/m², 180 €/m² i 200 €/m², respectivament. Calculeu la superfície de cada una sabent que entre les tres fan 1870 m², que el preu total de l'operació és de 336000 € i que el preu de la tercera parcel·la representa les tres quartes parts del preu de les altres dues juntes.

1.3.16. Resoleu les següents equacions exponencials:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3^{5x-2} = 9^{x-1} & \text{b) } 5^{1-x} = 125^{2x+3} \\ \text{c) } 3^{7x-4} = 1 & \text{d) } 9^{5x+2} = \sqrt[8]{3^{1-2x}} \\ \text{e) } 3^x + 3^{x-1} = 4 & \text{f) } 5^x + 5^{x+1} = 30 \\ \text{g) } 2^{2x+1} - 2^{x+1} = 4 & \text{h) } 3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0 \end{array}$$

1.3.17. Resoleu les següents equacions logarítmiques:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log(x+1) = 1 & \text{b) } \log(2x-3) = \log(3x+1) \\ \text{c) } \log x + \log(3+x) = \log 4 & \text{d) } 3 \cdot \log x - \log 5 = 2 \cdot \log 5 \\ \text{e) } 2 \cdot \log x - \log(2x-10) = 1 & \text{f) } \log x = \log \frac{1}{x} - 2 \end{array}$$

1.3.18. Quin capital és necessari col·locar al 6,5 % d'interès simple per tenir una renda anual de 360 €?

1.3.19. Quin tant d'interès simple es va aplicar a un capital de 2052 € si en el termini d'un any el muntant o capital final va ser de 2277,72 €?

1.3.20. Calculeu la durada d'un préstec de 2160 € si al 12 % d'interès simple anual s'ha convertit en 2678,4 €.

1.3.21. Calculeu els interessos comercials de 2508 € al 7 % d'interès simple anual en 39 dies.

1.3.22. Quantes setmanes va durar un préstec de 390 € si es va pagar 4,73 € d'interessos calculats al 9% d'interès simple anual? Recordeu que un any té 52 setmanes.

1.3.23. Quants mesos trigarà un capital en quadruplicar-se al 10 % d'interès simple anual?

1.3.24. En quant temps els interessos d'un capital, al 7,5% d'interès simple anual, és igual a la meitat el capital?

1.3.25. Quin muntant o capital final obtindrem al col·locar 1800 € a 6 anys i al 5,5% d'interès compost anual?. A quant pugen els interessos rebuts?

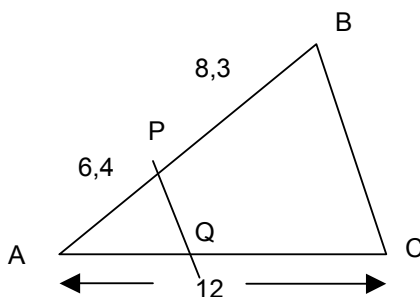
DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- 1.3.26. A quin tant per cent d'interès compost anual s'ha de col·locar un capital per tal que es dupliqui en 10 anys?
- 1.3.27. En quants anys un capital de 6 € col·locat al 5% d'interès compost anual produiran 0,93 € d'interès?
- 1.3.28. Dos capitals, dels quals sabem que el primer és 3000 € més gran que el segon, es troben col·locats al 7,5% i al 9% d'interès compost anual. Trobeu el valor que tenen tots dos capitals si sabem que en 20 anys tenen igual muntant.
- 1.3.29. La població d'un país augmenta per terme mig un 10 per mil anual. Si sabem que en l'actualitat té 30 milions d'habitants, quants en tindrà dintre d'un segle?
- 1.3.30. Una ciutat que en el 1950 tenia mig milió d'habitants, i en el 2002 tenia 4 milions. Quin tant per cent d'augment anual ha experimentat per terme mig?
- 1.3.31. La maquinària d'una fabrica perd cada any un 20% del seu valor. Si quan es va comprar el seu valor va ser de 240000 €, quin valor tindrà després d'11 anys de funcionament?
- 1.3.32. Els càlculs fets pels tècnics forestals ens diuen que actualment un determinat bosc té 24.000 m³ de fusta i que l'augment per terme mig és d'un 2,5% anual. Es demana:
- Quin volum de fusta es preveu que tindrà aquest bosc en dos anys?
 - Un petit incendi ha cremat una quarta part del bosc, quants anys trigarà el bosc a regenerar la fusta cremada en aquest incendi si suposem que les condicions inicials continuen essent les mateixes?

2. Geometria

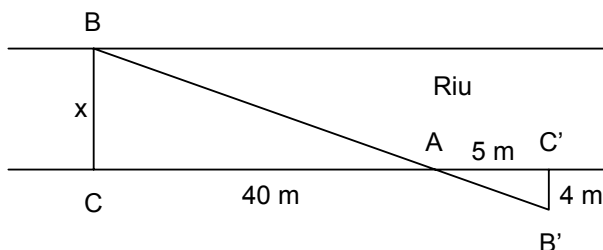
2.1. Trigonometria

- 2.1.1. Justifiqueu si són certes o falses les afirmacions següents:
- Un triangle pot tenir dos angles rectes.
 - Els angles que s'oposen als costats iguals d'un triangle isòsceles són iguals.
 - Els angles d'un triangle equilàter són tots iguals amb una amplitud de 60°.
 - Un triangle potser a l'hora rectangle i obtusangle.
 - La suma dels angles en un triangle qualsevol és superior als 360°.
- 2.1.2. L'ombra d'un gratacel en un determinat moment del dia amida 192 m. Si en el mateix instant i lloc l'ombra d'un senyal de tràfic de 2,5 m d'altura és d'1,5 m, quina és l'altura del gratacel?
- 2.1.3. En un triangle ABC, el costat AC amida 12 cm. Marquem un punt P en el costat AB de tal forma que determini en AB dos segments de longituds 6,4 cm i 8,3 cm. Si tracem per P una paral·lela al costat BC, aquesta talla a AC en el punt Q. Quines són les longituds dels segments determinats en AC pel punt Q?

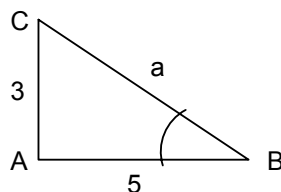


DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

2.1.4. Una tècnica per a medir l'amplada d'un riu sense tenir que creuar-lo és el que es mostra a la figura adjunta:

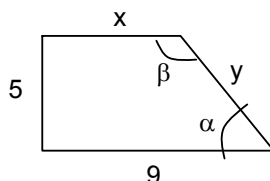


- a) Comproveu que els triangles ABC i AB'C' són semblants.
b) Fent ús de la semblança, quina és l'amplada del riu?
- 2.1.5. Un noi ha de canviar la bombeta d'un fanal situat en una paret a 5,4 m d'altura amb l'ajuda d'una escala de 3,5 m de longitud. Si el noi pot arribar fins a 2,25 m amb el braç estirat, a quina distància màxima de la paret ha de col·locar el peu de l'escala per a aconseguir el seu objectiu?
- 2.1.6. Calculeu l'àrea...
- a) del triangle equilàter de costat 5 cm.
 - b) del trapezi de bases 3 i 5 cm i altura 4 cm.
 - c) del rectangle que té una base igual al doble de l'altura i de perímetre 18 cm.
 - d) de la corona circular de radis 3 i 8 cm.
 - e) del sector circular de radi 4 cm i d'amplitud 60° .
- 2.1.7. a) Sabem que 1 litre = 1 dm^3 , quants m^3 tenim en un dipòsit que conté 1000 litres d'aigua?
b) L'home del temps ens informa que en una determinada població ha caigut 10 litres per metre quadrat. Si disposem d'un dipòsit de base quadrada d'un metre d'aresta, quina altura assoleix l'aigua recollida en aquest dipòsit i en aquesta població?
- 2.1.8. a) Les bases d'un prisma són triangles rectangles isòsceles d'àrea 8 cm^2 . Si l'aresta lateral amida 7 cm, quina és l'àrea del prisma? Quin és el seu volum?
b) La base d'una piràmide regular és un hexàgon de 6 cm de costat. Calculeu l'altura de la piràmide si sabem que la seva àrea lateral és doble que la de la seva base.
- 2.1.9. a) Quin és el volum d'una esfera que té una superfície de 1256 cm^2 ?
b) Determineu l'àrea i el volum d'un cilindre de diàmetre base 10 cm i d'altura 8 cm?
- 2.1.10. a) Passeu a graus, minuts i segons sexagesimals l'angle de $37,8^\circ$.
b) Passeu a graus sexagesimals l'angle de $13^\circ 25' 38''$.
- 2.1.11. a) Passeu a radians els angles d'amplitud 45° , 75° , 150° , 210° , 270° i 300° .
b) Passeu a graus sexagesimals els angles d'amplitud $\frac{\pi}{6} \text{ rad.}$, $\frac{11\pi}{3} \text{ rad.}$ i $\frac{7\pi}{4} \text{ rad.}$
- 2.1.12. Donat un triangle rectangle ABC, trobeu el sinus, cosinus i tangent de l'angle agut B, sabent que l'angle recte és A i que té per catets $b = 3 \text{ cm}$ i $c = 5 \text{ cm}$.



DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

2.1.13. Determineu les dades que falten en la figura adjunta.



- 2.1.14. a) Sabem que $\sin x = 3/5$ i que l'angle x és del 2n quadrant, quant valen $\cos x$ i $\tan x$?
b) Sabem que $\cos x = -2/3$ i que l'angle x és del 3r quadrant, quant valen $\sin x$ i $\tan x$?
c) Sabent que $\tan x = -5/3$ i que $\sin x > 0$, dibuixeu l'angle x i trobeu $\sin x$ i $\cos x$.

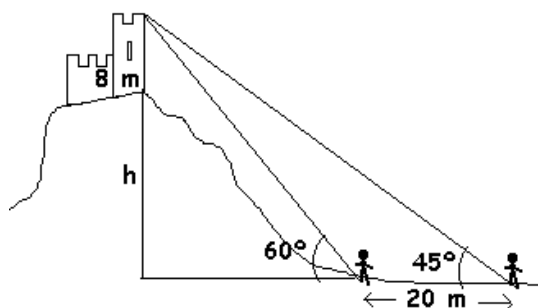
2.1.15. Trobeu el sinus, cosinus i tangent dels angles d'amplitud 840° i 1950° .

2.1.16. Uns nens pengen sobre un arbre la seva pilota. Si un dels nens es troba a 5 m del peu de l'arbre i la observa amb un angle d'elevació respecte del terra de 60° , a quina alçada es troba la pilota?

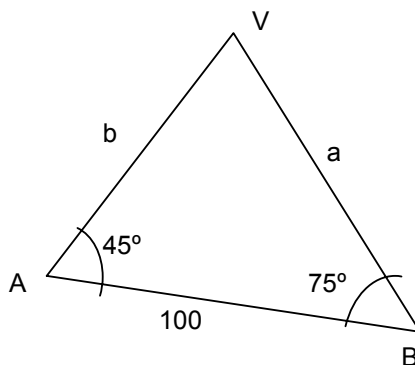
2.1.17. La part alta d'un edifici de 60 m d'alçada és observat per un paleta des d'un determinat punt del carrer que queda en front de la seva façana. Si sabem que l'angle d'elevació respecte del terra des d'aquest punt és de 75° i que si es retira 15 metres més és de 45° , a quina distància es troba del peu de l'edifici?

2.1.18. La part més alta d'un arbre és observada per una noia des d'un punt del terra situat a 10 m del peu de l'arbre sota un angle de 40° . Quina és l'altura d'aquest arbre?

2.1.19. Des d'un punt de la falda d'un petit turó observem la part més alta de la torre d'un castell situat al cim d'aquest turó amb un angle de 60° . Si ens allunyem 20 metres l'angle és de 45° . Quina és l'altura del turó si sabem que la torre del castell té una altura de 8 m?

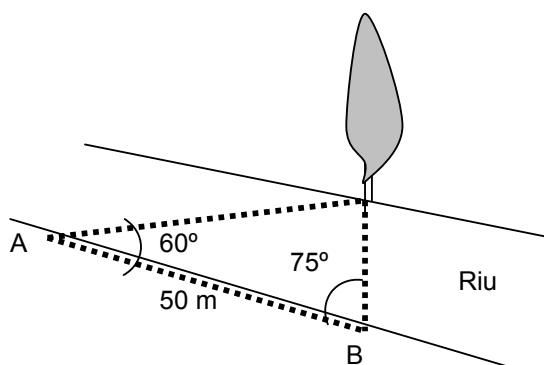


2.1.20. Dos ports marítims que disten 100 Km reben un missatge d'auxili d'un vaixell situat a alta mar. Els angles formats per la línia que uneix els dos ports amb les línies de recepció del senyal d'auxili són de 75° i 45° . Trobeu la distància des del vaixell a cada un dels ports.



DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- 2.1.21. Els costats iguals d'un triangle isòsceles amiden 5 cm i l'angle comprés 30° . Determineu la longitud de la base i l'àrea del triangle.
- 2.1.22. En un determinat instant, dos observadors separats per una distància de 500 m veuen un àguila que vola en el mateix pla vertical que ells. Els angles d'observació són respectivament $22,5^\circ$ i 75° . A quina altura vola l'àguila?
- 2.1.23. L'altura sobre el costat desigual d'un triangle isòsceles amida 10 cm i l'angle desigual 30° . Determineu:
a) Els altres dos angles.
b) El perímetre i l'àrea del triangle.
- 2.1.24. Determineu l'amplada d'un riu sabent que des de dos punts diferents d'un mateix marge del riu, separats 50 m, s'observa un arbre situat a l'altre marge sota uns angles d'amplitud 60° i 75° , tal com podeu observar en el croquis adjunt.



2.2 Nombres complexos

- 2.2.1. Trobeu les solucions complexes de l'equació $x^2 - 2x + 10 = 0$ i comproveu que la suma i el producte d'aquestes solucions és un nombre real.
- 2.2.2. Donats els nombres complexos $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = 5 + 2i$, calculeu les següents operacions donant el resultat en forma binòmica.
a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 - z_2$
c) $z_1 \cdot z_2$
d) z_1/z_2
e) $z_1 - 2z_1 \cdot z_2$
f) $(z_1)^5$
- 2.2.3. Quina és l'àrea del rectangle determinat pel afix del nombre complex $z = 3 - \sqrt{3}i$, i els afixos del conjugat, l'oposat i l'oposat del conjugat de z ? Justifiqueu-vos.
- 2.2.4. Trobeu la forma binòmica de les arrels quarts del nombre complex $-8 + 8\sqrt{3}i$.
- 2.2.5. Determineu el valor de m per tal que $\frac{1+mi}{2-i}$ sigui...
a) un imaginari pur.
b) un nombre real.
- 2.2.6. Demostreu que si z és un nombre complex, el quocient $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}$, on $\bar{z}$ és el conjugat de z , és sempre un nombre complex imaginari pur.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

2.3. Vectors al pla

- 2.3.1. Donats els punts $P(3,2)$, $Q(1,3)$ i $R(-1,-2)$ i el vector $\mathbf{u} = (1,2)$, es demana:
- Representeu en uns eixos de coordenades, els punts P , Q i R . Representeu el vector $\mathbf{u}$ amb origen en P . Quines són les coordenades de l'extrem d'aquest vector?
 - Quines són les coordenades del punt mig del segment definit per P i Q ?
 - Quines són les coordenades d'un punta S si els punts P , Q , R i S defineixen els vèrtexs del paral·lelogram $PQRS$?
- 2.3.2. Doneu les diferents equacions de la recta r que passa pel punt $P(4,-1)$ i té com a vector director $\mathbf{u} = (2,5)$. Indiqueu-ne el pendent d'aquesta recta.
- 2.3.3. Sigui $2x - 3y + 4 = 0$ l'equació general de la recta r . Es demana:
- Un punt i el pendent de la recta r .
 - Les equacions paramètriques de r .
- 2.3.4. Podem assegurar que el punt $P(3,1)$ és de la recta que passa pel punt $Q(-2,-2)$ i té com a vector director $\mathbf{u} = (1,3)$? Justifiqueu-vos.
- 2.3.5. Considereu la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1}$, es demana:
- Un punt i el pendent de r , així com l'equació general de r .
 - Els punts de tall de la recta r als eixos de coordenades.
- 2.3.6. Doneu l'equació general de la recta que passa pels punts $P(2,-3)$ i $Q(-1,2)$.
- 2.3.7. Digueu si els tres punts $P(1,2)$, $Q(3,3)$ i $C(-1,1)$ estan alineats o no. Justifiqueu-vos.
- 2.3.8. Trobeu l'equació de la recta que té pendent $3/2$ i passa pel punt $P(-3,5)$. Quins són els punts de tall d'aquesta recta als eixos de coordenades?
- 2.3.9. Trobeu el punt de tall de les rectes $r: x - 2y + 5 = 0$ i $r': \begin{cases} x = 3 - k \\ y = -1 + 2k \end{cases}$.
- 2.3.10. Trobeu l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i forma un angle de 45° amb el semieix positiu de l'eix OX .
- 2.3.11. Donats els punts $P(3,1)$ i $Q(1,2)$ i les rectes $r: 3x - 4y - 12 = 0$ i $s: x + y + 1 = 0$. Trobeu:
- L'equació de la recta paral·lela a r que passa pel punt P .
 - L'equació de la recta que passa pel punt de tall de les rectes r i s i té pendent 2.
- 2.3.12. Quina és la posició relativa dels següent parell de rectes?
- $3x - y + 1 = 0$ i $x + 2y - 1 = 0$
 - $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = k \end{cases}$ i $x + y - 2 = 0$
- 2.3.13. Quin valor pren m per tal que les rectes $mx + 4y - 5 = 0$ i $9x + my - 2 = 0$ siguin paral·leles?
- 2.3.14. Trobeu l'equació de la recta perpendicular a $r: 3x + 2y - 5 = 0$ que passa per $P(2,-1)$. Quina relació existeix entre els pendents d'ambdues rectes?
- 2.3.15. Trobeu l'equació de la mediatriu al segment definit pels punts $P(2,5)$ i $Q(-2,3)$. Quin angle forma la mediatriu amb la recta $x + y - 1 = 0$?

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- 2.3.16. Considereu els punts $P(2,3)$ i $Q(-1,2)$ i la recta $r: 3x + y - 5 = 0$. Es demana:
- la distància de P a Q i la distància de P a la recta r .
 - l'angle determinat per la recta r i la recta que passa per P i Q .
- 2.3.17. Considereu la recta d'equació $r: 3x + 2y - 9 = 0$ i el punt $P(4,-3)$. Es demana:
- l'equació de la recta paral·lela a r que passa per P .
 - l'equació de la recta perpendicular a r que passa per P .
 - El punt P' simètric de P respecte de la recta r .
- 2.3.18. Si $A(-1,2)$, $B(2,3)$ i $C(3,1)$ són els vèrtexs d'un triangle ABC , quant amida el perímetre i la seva àrea?

3. Funcions i gràfiques

3.1. Funcions

- 3.1.1. Si l'àrea d'un rectangle és 36 cm^2 , quina és l'expressió de la funció que dona l'altura del rectangle si coneixem la base?
- 3.1.2. La suma de les edats d'un pare i el seu fill és 60. Quina és l'expressió que ens dona l'edat del fill en funció de l'edat del pare?
- 3.1.3. Donada la funció racional $f(x) = \frac{x}{x+1}$, determineu:
- les imatges de 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, $-\frac{1}{2}$, -1, -2 i -3.
 - les coordenades dels punts de tall als eixos.
 - el gràfic de la funció.
- 3.1.4. Determineu el domini i el recorregut de les funcions $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ i $h(x) = \frac{x-2}{3x+1}$.
- 3.1.5. Representeu les següents funcions definides a intervals:
- a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- Quines són les propietats observables a partir del seu gràfic?
- 3.1.6. Donada la funció $f(x) = 3x + 2$, determineu:
- el pendent i l'ordenada en l'origen.
 - les coordenades dels punts de tall als eixos.
 - el gràfic de la funció.
- 3.1.7. Determineu m i n en la funció $f(x) = mx + n$ sabent que el seu gràfic passa pels punts $P(-1,2)$ i $Q(3,1)$.
- 3.1.8. Donada la funció $f(x) = x^2 - 2x$, es demana:
- les coordenades dels punts de tall als eixos de coordenades.
 - les coordenades del vèrtex.
 - el gràfic de la funció.
- 3.1.9. Considereu la funció $f(x) = -2x^2 + x + 1$, es demana:
- les coordenades dels punts de tall als eixos.
 - les coordenades del vèrtex.
 - el gràfic de la funció.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

3.1.10. Trobeu la funció polinòmica de grau dos que passa pels punts A(-2,5), B(2,1) i C(4,5).

3.1.11. Hem pres la temperatura d'un líquid a mesura que s'anava escalfant. La taula obtinguda de temperatures en funció del temps ha estat:

Temps (minuts)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	20	24	28	32	36	40

- Comproveu que el comportament d'aquesta funció és lineal.
- Quina és l'expressió de la temperatura en funció del temps?
- Quina temperatura té el líquid als 2,5 minuts?
- En quin temps la temperatura del líquid és de 33°?
- Si el fenomen continua tenint el mateix comportament, quina temperatura tindrà el líquid als 8 minuts?

3.1.12. Dibuixeu les funcions exponencials $f_1(x) = 2^x$ i $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, construint prèviament una taula de valors. Quines són les propietats observables a partir dels gràfics.

3.1.13. Les amebes són éssers unicel·lulars que es reproduïxen dividint-se en dos. Aquest procés és més o menys ràpid segons les condicions del medi on es troben (cultiu). Considereu que les condicions del cultiu són tal que es dupliquen aproximadament cada hora, i que inicialment només en tenim una.

- Quin és el número d'amebes que obtindrem a mesura que passen les hores. Completeu la taula adjunta:

Temps (en hores)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Núm. d'amebes	1	2									

- Determineu la funció exponencial obtinguda a partir de les dades i representeu-la.

3.1.14. Si la funció $f(x) = 1000 \cdot (1,05)^x$ la interpretem com una funció que ens dona el capital final en funció del temps (en anys) a interès compost,

- quin seria el capital inicial? I el taxa d'interès anual?
- al final del cinquè any, quin seria el capital final? I els interessos?

3.1.15. Donada la funció definida per $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, es demana:

- els límits laterals en els punts 0 i 1. Existeixen els límits en aquests punts?
- els límits en l'infinit.

3.1.16. Calculeu:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 4}{3x^2 - x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{5})$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4}{x^2 - x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 4}{3x^2 - x + 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 1 \right)$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{\frac{1}{x}}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^x$

3.1.17. Podem assegurar que la funció $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1-x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ és continua en $x = 1$? En cas negatiu, digueu el tipus de discontinuïtat que presenta en aquest punt.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

3.1.18. Estudieu la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en els punts 0 i 2.

3.1.19. Trobeu els punts de discontinuïtat de la funció $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 5x + 6}$.

3.1.20. Trobeu les assíptotes de les següents funcions :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9}$

3.2. Derivades.

3.2.1. Apliqueu la definició de derivada per calcular $f'(-1)$ per a les funcions següents:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+5}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

3.2.2. Calculeu les derivades de les funcions:

a) $f(x) = 5x^6 - 3x^4 + x^2 - 1$

b) $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x + 3)$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

d) $f(x) = (3x^5 - 2x) \cdot \sin x$

e) $f(x) = e^x \cdot (x^3 - 1)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x} - x \cdot \cos x$

g) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

j) $f(x) = \frac{1}{\tan x}$

3.2.3. Calculeu les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = \sin(\ln x)$

b) $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $f(x) = (x^3 - 2x)^{121}$

e) $f(x) = \ln(x - 2^x)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x - \ln x}$

g) $f(x) = \arctan(1 + x^2)$

h) $f(x) = \log\left(x + \frac{1}{x}\right)$

i) $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$

j) $f(x) = e^{x + \arctan x}$

3.2.4. Trobeu l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^2 + 5x - 1$ en el punt d'abscissa $x_0 = 2$.

3.2.5. En quin punt la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ és paral·lela a la recta d'equació $y = 2x + 1$?

3.2.6. Sabem que la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = e^x + 1$ forma un angle de 45° amb el semieix positiu de les x . Determineu el punt de tangència i l'equació de la recta tangent.

3.2.7. Determineu l'equació de la recta tangent i normal al gràfic de la funció $f(x) = x^2 - 2x$ en el punt d'abscissa $x_0 = 3$.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

3.2.8. Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$. Quines són les coordenades dels extrems relatius?

3.2.9. Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. Quines són les coordenades dels extrems relatius?

3.2.10. Determineu els intervals de concavitat i convexitat de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. Quines són les coordenades dels punts d'inflexió?

3.2.11. Trobeu els extrems relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = x^4 - x^2$.

3.2.12. Estudieu i representeu les funcions:

a) $f(x) = x^4 - 2x$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$

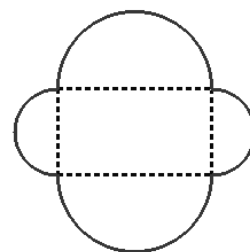
3.2.13. Donada la funció $f(x) = \frac{x+a}{x^2}$, es demana:

- a) Quin és el valor del paràmetre **a** per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en $x = 2$? Indiqueu si per aquest valor és un màxim o un mínim.
- b) L'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ per al valor d'**a** obtingut en l'apartat anterior.

3.2.14. Descompondre el nombre 36 en dos sumands, tal que el seu producte sigui màxim.

3.2.15. De tots els triangles rectangles amb hipotenusa igual a 9 cm, calculeu el d'àrea més gran.

3.2.16. El perímetre d'un rectangle amida 4 m i els seus costats es troben substituïts per semicircumferències exteriors, tal com pots observar en la figura adjunta. Trobeu les dimensions del rectangle que faci que la superfície d'aquesta figura sigui mínima.



3.2.17. Considereu els triangles isòsceles de base variable i de costats laterals iguals a 1 cm. Es demana:

- a) Quina és l'expressió que dona l'àrea d'aquests triangles en funció de la base?
- b) Quin valor pren la base per tal que l'àrea sigui màxima?

3.2.18. La suma de totes les arestes d'un prisma recte de base quadrada és 36 cm. Calculeu les dimensions del prisma perquè tingui volum màxim.

3.2.19. S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de $81\pi \text{ m}^3$ de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45 € el m^2 .

- a) Determineu el cost $C(r)$ del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r .
- b) Quin és el radi r i l'altura h del dipòsit per tal que el cost del material sigui mínim? En tal cas, quin és aquest cos?

Observació:

Recordeu que el volum d'un cilindre de radi-base r i altura h és: $V = \pi r^2 \cdot h$ i que la superfície lateral d'aquest cilindre és: $S_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot h$.

4. Estadística i probabilitat

4.1. Estadística descriptiva unidimensional.

4.1.1. Si es vol realitzar una enquesta sobre el consum de llet en una determinada ciutat, podem extreure conclusions generals vàlides a partir d'una enquesta realitzada als alumnes del nostre centre? Per què?

4.1.2. Sabem que el nombre de càries entre l'alumnat de primària a la ciutat de Barcelona oscil·la entre 0 i 3. En aquest supòsit...

- a) Quina és la població d'estudi? Creieu que és factible treballar amb tota la població?
- b) Si hem de definir una mostra, doneu un criteri vàlid per a poder escollir els alumnes que han de formar part d'aquesta mostra.

4.1.3. Si per passar una enquesta als 5000 alumnes matriculats en una facultat, entre els quals 2700 són noies i 2300 són nois, es pren una mostra de 600 alumnes, quin serà el nombre de noies i nois que prendran part d'aquesta mostra?

4.1.4. Hem anat al mercat a comprar un quilo de pèsols i ens han servit 20 beines. Un cop obertes, el nombre de pèsols continguts en cada una d'aquestes beines ha estat:

3, 5, 7, 4, 3, 5, 1, 3, 2, 5,
1, 2, 6, 5, 4, 1, 0, 7, 5, 4.

- a) Construïu la taula de distribucions de freqüències i representeu el gràfic de línies.
- b) Indiqueu quin percentatge de la mostra representen les beines que contenen entre 3 i 5 pèsols, ambdós números inclosos.

4.1.5. El quadre adjunt ens mostra la distribució percentual de vendes d'uns determinats productes en un gran magatzem i en els dos primers trimestres d'aquest any.

Producte	% de vendes	
	1r trimestre	2n trimestre
Microones	55	40
Frigorífics	25	35
Rentadores	12	20
Ventiladors	8	5

- a) Dibuixeu el corresponent diagrama de barres comparatives.
- b) Si sabem que el núm. de vendes totals en el primer trimestre de l'any han estat de 13.200 unitats, determineu el nombre d'unitats venudes de cadascun dels productes.

4.1.6. Sobre les dones ingressades en un hospital, en un determinat període de temps, sabem que:

Estat civil	%
Casades	50
Solteres	25
Separades	15
Vídues	10

- a) Dibuixeu el diagrama de sectors.
- b) Si el número de dones ingressades en aquest període de temps va ser de 420, completeu la taula de distribució de freqüències afegint-hi les freqüències absolutes i les relatives.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES

PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

4.1.7. En el monitor d'un ordinador es pot llegir una pregunta referent a Història. Amb el teclat, l'alumne marca una resposta de quatre possibles. Si aquesta és incorrecta, per la pantalla surt la frase: "La resposta és incorrecta, torna-ho a provar", i només quan la resposta és correcta lo dona el temps en minuts emprats en respondre correctament. Els valors obtinguts al fer passar per l'ordinador els 30 alumnes d'una classe de 3r d'ESO separatament, han estat:

1.5, 3.5, 0.8, 1.0, 2.3, 1.1, 0.9, 3.1, 2.7, 2.9,
 1.3, 1.6, 1.3, 1.7, 2.1, 2.3, 2.9, 3.5, 3.1, 0.8,
 0.8, 1.5, 1.3, 3.2, 2.9, 4.0, 3.9, 2.7, 1.7, 3.1.

Si volem agrupar els valors de la variable de tal forma que tots els intervals de classe tinguin amplitud 0.4, quants intervals creieu que podrem definir?

- Construeix la taula de distribució de freqüències agrupant els valors de la variable en intervals de classe d'amplitud 0.4.
- Representeu el polígon de freqüències.
- Si es considera que el temps màxim acceptable per tal que l'alumne hagi superat la prova és de 2 minuts, quin percentatge d'alumnes d'aquesta classe supera la prova?

4.1.8. Durant els tres primers mesos de l'any, s'ha mesurat cada dia la temperatura mínima (en °C) en una població de muntanya, obtenint la següent distribució:

Temperatura (°C)	Núm. de dies
De -4 a 0	6
de 1 a 5	39
de 6 a 10	27
de 11 a 15	18
N =	90

- Escriu els extrems "reals" dels intervals de classe i les corresponen marques de classe.
- Determineu els percentatges de dies per a cada interval de classe.
- Dibuixeu l'histograma i el polígon de freqüències.
- Quin és el percentatge de dies amb una temperatura inferior a 7°C?
- Quin és el número de dies que tenen una temperatura mínima superior o igual als 10°C?

4.1.9. Al tirar 20 vegades un dau hem obtingut la següent distribució de freqüències:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	3	5	2	1	4	5

- Amb quin percentatge ha sortit cadascuna de les cares del dau?
- Determineu els valors de la mitjana aritmètica, el mode i la mediana. Interpreteu els resultats obtinguts.
- Quins valors prenen el primer i tercer quartil? Determineu el rang interquartílic.
- Calculeu la desviació estàndard i el coeficient de variació. Quina diferència substancial existeix entre aquest dos paràmetres de dispersió.

4.1.10. Les altures (en cm.) dels 30 atletes juvenils que hi participen en una cursa popular són:

170, 181, 183, 176, 165, 168, 179, 181, 180, 183,
 159, 169, 177, 159, 170, 188, 179, 180, 182, 181,
 169, 170, 171, 185, 189, 159, 168, 169, 180, 189.

- Construïu la taula de distribucions de freqüència agrupant les dades en intervals de classe d'amplitud 5.
- Quina ha de ser l'altura de l'atleta que ve representat per la mitjana aritmètica?. I l'altura representada pel mode?
- Quina és l'altura d'un atleta que deixa per sota d'ella el 50 % de les altures?
- Determineu la desviació estàndard d'aquesta distribució d'altures.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- 4.1.11. Una agència de lloguer de cotxes, sobre una mostra de 22 clients en temporada baixa i de 54 clients en temporada alta, ha observat que les distribucions sobre el número de dies que es lloga un cotxe és:

Nº de dies	Núm. de clients	
	Temporada baixa	Temporada alta
D'1 a 2	10	16
de 3 a 4	6	21
de 5 a 6	5	14
de 7 a 8	1	3
N =	22	54

- a) Determineu el núm. mig de dies que es lloga un cotxe, en temporada baixa i en temporada alta, així com les corresponents desviacions estàndards.
- b) En quina de les dues distribucions hi ha menys dispersió relativa?
- 4.1.12. Un producte es troba a la venda en 6 botigues diferents d'un complex comercial. Els preus en euros en cada una d'aquestes botigues són: 8,75; 10,50; 9,10; 10,24; 9,50 i 7,50. Es demana:
- a) Quin és el preu mig d'aquest producte dins el complex comercial?. Quina és la desviació estàndard?
- b) S'ha comprovat que en època de rebaixes, els botiguers d'aquest complex comercial apliquen l'expressió matemàtica $y = 0,5 \cdot x + 0,6$ per deduir el preu rebaxat d'aquest producte, essent x el preu en temporada normal i y el preu rebaxat. Calculeu en tal cas el preu mig i la desviació estàndard en època de rebaixes, i constateu que $\bar{y} = 0,5 \cdot \bar{x} + 0,6$ i que $S_y = 0,5 \cdot S_x$.
- 4.1.13. La següent distribució ens dona el capital (en milions d'euros) invertits per les 400 empreses dedicades a la construcció amb domicili social en una important ciutat.

Capital	Núm. d'empreses
Menys de 5	12
entre 5 i 12	66
entre 13 i 20	212
entre 21 i 50	82
entre 51 i 100	30
més de 100	18

- a) Utilitzant com a marques de classe del primer i del darrer interval el 3 i el 150 respectivament, quin és el capital mig invertit per aquestes empreses?. Quina és la desviació estàndard en aquesta distribució?
- b) Representeu el corresponent histograma, i utilitzeu-lo per tal de interpretar el tipus de curtosi i d'asimetria que presenta aquesta distribució.

4.2. Estadística descriptiva bidimensional.

- 4.2.1. Unes dades recollides en els darrers 5 anys sobre la pluviositat i la venda de paraigües en un poble indiquen que:

Pluja (en m ³)	380	450	350	300	420
Núm. paraigües venuts	203	324	230	200	280

- a) Calculeu les mitjanes i les desviacions estàndards de les dues variables: "Quantitat d'aigua caiguda en un any" i "Núm. de paraigües venut en aquest any".
- b) Determineu el coeficient de correlació lineal i interpreteu-lo.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- c) Determineu la recta de regressió del núm. de paraigües venuts en funció de la quantitat d'aigua caiguda. Quin seria el núm. estimat de paraigües venuts en un any si en aquesta ciutat caigués 400 m^3 d'aigua? Tingueu en compte l'error probable d'estimació.
- 4.2.2. Una distribució bidimensional (x_i, y_i) en que x_i correspon a l'alçada d'unes mares i la y_i a l'alçada de les filles grans, totes elles mesurades en cm, té associada la següent recta de regressió $y = 0,72 \cdot x + 43,19$.
- a) Quin signe té el coeficient de correlació lineal? Quina informació ens dóna?
b) Quina serà l'alçada estimada de la filla d'una mare que faci 160 cm?
- 4.2.3. En un experiment per estudiar la relació que hi ha entre la dosi d'un medicament i el temps de reacció d'un malalt estimat davant un senyal auditiu, s'ha recollit les dades:

Dosi (mg)	1	3	4	7	9	12	13	14
Temps (s)	3,5	2,4	2,1	1,3	1,2	2,2	2,6	4,2

- a) Feu un núvol de punts col·locant en l'eix d'abscisses la dosi, i en l'eix d'ordenades el temps. Creieu que el temps depèn de la dosi? Justifiqueu-vos.
b) Es pot ajustar al núvol de punts una recta? Té sentit calcular el coeficient de correlació lineal en aquest cas?. Justifiqueu la vostra resposta.
- 4.2.4. Les notes obtingudes per vuit alumnes en les assignatures d'Anglès i de Llengua catalana han estat:

Notes d'Anglès	7	8,5	7,5	6	5	4	3	4
Notes de Llengua catalana	6,5	7	6	5,5	5	5	3	3,5

- a) Determineu l'equació de la recta de regressió de les notes de Llengua catalana sobre les notes d'Anglès i representeu-la en el núvol de punts.
b) Quin valor pren el coeficient de correlació lineal? Quina és la seva interpretació?
- 4.2.5. A la taula adjunta tenim els percentatges de població rural d'una comunitat.

Any	1968	1975	1982	1992	2002
% de població rural	58	55	51	49	45

- Si anomenem x els anys i y els percentatges de població rural,
- a) Determineu les mitjanes i les desviacions estàndards d'ambdues variables.
b) L'equació de la recta de regressió de y sobre x . Podem saber el signe que té el pendent de la recta sense haver de fer cap càlcul?
c) Estimeu, amb l'ajut de la recta de regressió, el percentatge de població rural que hi haurà l'any 2004.
d) Quin valor pren el coeficient de correlació lineal? Doneu la seva interpretació.
- 4.2.6. Sabem que les rectes de regressió entre dues variables x i y són $y = 0,8 \cdot x + 1,2$ i $x = 3,1 \cdot y + 0,9$.
- a) Podem determinar només amb aquesta informació els valors de les mitjanes aritmètiques de x i de y ? Justifiqueu-vos.
b) Quin tipus de correlació es dóna entre les dues variables? Perquè?

4.3. Probabilitat.

- 4.3.1. Tirem un dau, quina és la probabilitat que...
- a) surti una puntuació superior a 3?
b) no surti el 6?

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- 4.3.2. Dos dies per setmana menges pasta com a primer plat. Quina és la probabilitat que avui tinguis com a primer plat macarrons?
- 4.3.3. En una pregunta hi ha 4 respostes i només una d'elles és correcta. No coneixeu la resposta i contesteu a l'atzar. Quina és la probabilitat que l'encerteu?
- 4.3.4. Es tira primer un dau i després una moneda.
- a) Doneu el conjunt de resultats possibles.
 - b) Quina és la probabilitat d'obtenir un 2?
 - c) Quina és la probabilitat d'obtenir una puntuació parell al dau i una cara a la moneda?
- 4.3.5. Un joc de cartes espanyoles té quatre pals: ors, bastons, copes i espases. Cada pal té 12 cartes numerades de l'1 al 12. A la carta amb un 1 se l'anomena AS i a les cartes 10, 11 i 12 se les anomena SOTA, CAVALL I REI respectivament, i són les úniques figures humanes del joc. Es demana les probabilitats dels següents esdeveniments:
- a) treure una carta amb un 7.
 - b) treure figura.
 - c) treure un AS o un REI.
 - d) treure un or o bé una figura.
- 4.3.6. Al tirar dos daus, quins és la probabilitat que les puntuacions dels dos daus siguin iguals? I que la suma de punts sigui 7?
- 4.3.7. En una capsa tenim 10 boles numerades de l'1 al 10. Les boles 1, 2, 3 i 4 són blanques i les altres són negres. Quina és la probabilitat de treure...
- a) bola blanca?
 - b) bola blanca o una puntuació parell?
 - c) bola negra o una puntuació múltiple de 3?
 - d) bola amb una puntuació inferior a 9?
- 4.3.8. En una petita escola d'idiomes només s'ensenya dues llengües: l'anglès i el francès. Hi ha 20 alumnes que estudien francès, 48 que estudien anglès i 10 que estudien les dues llengües. Quants alumnes hi ha a l'escola? Si triem un alumne a l'atzar, quina probabilitat tenim que només estudiï anglès? Quina és la probabilitat que estudiï tots dos idiomes?
- 4.3.9. El 13 % d'assistents a una reunió tenen els ulls blaus, el 25 % porten jersei i el 60 % tenen el cabell negre. El 69 % dels assistents tenen almenys una de les tres característiques anteriors, mentre que només un 4 % dels assistents tenen les tres característiques a la vegada. El 8 % dels assistents tenen els ulls blaus i el cabell negre. El 18 % porten jersei i tenen el cabell negre. S'escull a l'atzar una persona de la reunió. Quina és la probabilitat que tingui els ulls blaus i porti jersei?
- 4.3.10. En una capsa tenim 8 boles, tres de blanques numerades de l'1 al 3 i cinc de negres numerades de l'1 al 5. S'agafa una bola a l'atzar, i es consideren els esdeveniments següents: A = "bola blanca" i B = "número més petit o igual que dos".
- a) Són els esdeveniments A i B independents?
 - b) Calculeu $P(B / A)$.
- Justifiqueu les vostres respostes.
- 4.3.11. Tres submarins s'entesten a enfonsar un pacífic vaixell. Per tal d'aconseguir-ho, cadascun d'ells dispara un projectil, i les probabilitats d'encertar el vaixell són 0,1, 0,2 i 0,3 respectivament. Calculeu la probabilitat que el vaixell no sigui enfonsat.
- 4.3.12. Una escola té 500 alumnes 20 dels quals són esquerrans. N'escollim tres a l'atzar. Quina és la probabilitat que almenys un sigui esquerrà?. Supposeu que en cada elecció d'un alumne la probabilitat que sigui esquerrà és la mateixa.

DOSSIER DE MATEMÀTIQUES
PROVES D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

- 4.3.13. Utilitzeu la fórmula $P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(\bar{B}) \cdot P(A/\bar{B})$ per calcular la probabilitat que cert alumne aprovi un examen si sabem que, havent estudiat, pot aprovar amb una probabilitat de 0,9; que, si no ha estudiat, pot aprovar amb una probabilitat de 0,2; i que estudia per a la meitat dels exàmens.
- 4.3.14. En una bossa tenim 3 boles blanques i 4 negres. L'experiència consisteix en treure una bola i sense tornar-la a la bossa, treure una altra. Quina és la probabilitat que...
- a) les dues boles siguin del mateix color?
 - b) les dues boles siguin de color diferent?
 - c) al menys una bola és negra?
- 4.3.15. La probabilitat que una peça presenti un defecte A en sortir d'una cadena de producció és 0,1. Entre les peces que presenten aquest defecte A, i només en aquestes, podem trobar també un defecte B amb una probabilitat de 0,3. Calculeu la probabilitat que una peça presenti els dos defectes.
- 4.3.16. Després de fabricar un producte determinat, aquest passa per dos controls de qualitat A i B, que comproven qualitats independents. El producte només sortirà al mercat si els supera tots dos. Sabem que el 80 % dels productes superen el control A i que el 60 % dels productes acaben sortint al mercat. Calculeu el percentatge de productes que superen el control B.
- 4.3.17. Tenim una moneda trucada amb probabilitat 0,6 de sortir cara i probabilitat 0,4 de sortir creu. Si la tirem quatre vegades, quina és la probabilitat que surti creu més de dues vegades?
- 4.3.18. Tenim una urna amb 4 boles blanques, 4 de negres i 2 de vermelles. En traiem 3 consecutives, i retornem cada vegada la bola a l'urna abans de treure la següent. Calculeu la probabilitat que almenys dues siguin blanques.
- 4.3.19. Calculeu la probabilitat d'obtenir almenys una cara en llançar deu vegades una moneda.
- 4.3.20. La probabilitat que un tirador amb arc faci diana és 0,2. Si fa 3 intents independents, quina és la probabilitat que faci exactament 1 dianes?
- 4.3.21. Disposem de dues urnes amb les següents distribucions de boles: La urna A_1 conté 1 bola negra i 3 blanques, mentre que la urna A_2 conté 3 boles negres i 1 blanca. Agafem un dau i el tirem. Si surt una puntuació inferior o igual a 4, agafem una bola de la urna A_1 , en cas contrari l'agafarem de la urna A_2 . Treta una bola a l'atzar en aquestes condicions, quina és la probabilitat que....
- a) sigui negra?
 - b) sigui de la urna A_1 si sabem que és negra?
- 4.3.22. El 30 % de les monedes d'un sac són falses, i pesen més de 5 grams el 25 % de les falses i el 15 % de les bones. Es tria una moneda a l'atzar....
- a) quina és la probabilitat de que pesi menys de 5 grams?
 - b) quina és la probabilitat que sigui falsa si sabem que pesa 6 grams?
- 4.3.23. Es tira un dau tres vegades. Quina és la probabilitat que la suma de les puntuacions obtingudes sigui 4?
- 4.3.24. Una experiència consisteix en anar tirant una moneda fins que surti creu. Quina és la probabilitat que surti creu al quart intent?