

2. ÀLGEBRA LINEAL.

2.1. Càlcul matricial.

2.1.1. Definicions.

Una matriu és un quadre de números disposats ordenadament en forma de files i de columnes. S'anomena ordre de la matriu al número de files pel número de columnes. Així doncs, una matriu de 2 files i 3 columnes es diu que té ordre 2x3.

Una matriu que té igual el número de files i el número de columnes s'anomena matriu quadrada. Si aquests números són diferents es diu que la matriu és rectangular.

2.1.2. Operacions amb matrius.

1) Suma de matrius: Dues matrius es poden sumar o restar si totes dues tenen el mateix ordre, i ho farem així:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{bmatrix}$$

2) Producte d'una matriu per un número real: Per multiplicar una matriu per un número real k cal multiplicar tots els elements per k. Així doncs:

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \end{bmatrix}$$

3) Producte de matrius: Dues matrius només es poden multiplicar si el número de columnes de la primera matriu és igual al número de files de la segona matriu. El producte de matrius quan aquest és possible es fa així:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{bmatrix}$$

2.1.3. Rang d'una matriu.

El rang d'una matriu és el número de files o de columnes linealment independents que té la matriu. Una manera pràctica de calcular el rang d'una matriu és transformar la matriu en una altra que tingui tot de zeros per sota de la diagonal principal fent ús només de transformacions lineals. Així per exemple:

$$\text{Si } M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ fent transformacions de files com per exemple } 2 \cdot I - II \text{ i } I + III,$$

$$\text{obtenim la matriu transformada } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ i fent novament } II + 2 \cdot III \text{ obtenim } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ El}$$

número de files no nul·les després de trobar tots els zeros que queden per sota de la diagonal principal ens dóna el rang. En aquest cas, el rang de M és 2.

2.1.4. Determinant d'una matriu quadrada.

1) Determinant d'ordre 2: Es defineix com el valor $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Si el determinant és d'ordre superior a 3, es redueix a determinants d'ordre 3 desenvolupant-lo per adjunts amb una fila o columna que tingui el nombre màxim de zeros, o abans es fan les transformacions pertinents perquè una fila o columna tingui molts zeros. Així per exemple, el següent determinant el desenvoluparem per la 3a. fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 16 - 2 \cdot (-8) = 0$$

2.1.5. La matriu inversa.

Una matriu quadrada M té matriu inversa si $|M| \neq 0$. I una forma de trobar-la és aplicant la fórmula: $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{Adj}(M^t)$, on M^t és la matriu trasposta de M (matriu que canvia les files per columnes en M) i $\text{Adj}(M^t)$ la matriu d'adjunts de M^t .

2.2. Sistemes d'equacions lineals.

2.2.1. Definicions.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Direm que el sistema és homogeni si tots els seus termes independents són iguals a 0.

2.2.2. Classificació dels sistemes lineals.

Els sistemes lineals poden ser:

- 1) Compatibles, si tenen solució. Serà compatible determinat (S.C.D.) si en té una i compatible indeterminat (S.C.I.) si en té infinites.
- 2) Incompatibles (S.I.), si no tenen cap solució.

2.2.3. Matrius associades a un sistema lineal.

S'entén per matriu de coeficients del sistema la matriu formada per tots els coeficients col·locats en files i columnes tal com es troben en el sistema. I per matriu ampliada, la matriu formada pels coeficients i els termes independents en el mateix ordre que es troben en el sistema.

2.2.4. Mètodes de resolució de sistemes lineals.

A part dels mètodes tradicionals, existeixen altres mètodes pràctics per resoldre sistemes lineals, aquests són:

1) Mètode de Gauss:

Què consisteix en buscar zeros per sota de la diagonal principal de la matriu de coeficients mitjançant transformacions lineals entre files, per tal de triangularitzar el sistema i facilitar així la recerca de la solucions.

2) Mètode de Cramer.

Es diu que un sistema lineal és de Cramer si té igual número d'equacions que número incògnites, i el determinant de la matriu de coeficients és diferent de 0. En tal cas, la solució la trobem així:

Si indiquem per $|C|$ el determinant de la matriu de coeficients, aleshores:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|C|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|C|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix}}{|C|}, \text{ essent}$$

els valors que prenen $x_1, x_2, \dots, x_n$ la solució del sistema.

2.2.5. Teorema de Rouché-Frobénius: Discussió de sistemes lineals.

El present teorema ens permet discutir si un sistema té o no solució, i si en té, quantes. No s'ha de pretendre veure en ell un mètode de resolució. El teorema assegura:

- 1) Si el rang de la matriu de coeficients és diferent del rang de la matriu ampliada, el sistema no té solució, és per tant, un S.I.
- 2) Si el rang de la matriu de coeficients és igual al rang de la matriu ampliada, el sistema té solució, és per tant un sistema compatible. Si el rang comú a les dues matrius és igual al número incògnites, el sistema només tindrà una solució, és a dir, serà un S.C.D., mentre que si aquest rang comú és més petit que el número incògnites, el sistema tindrà infinites solucions, és a dir, serà un S.C.I.

En aquest darrer cas, la diferència entre el número incògnites i el rang comú a les dues matrius ens dóna el número de paràmetres o graus de llibertat del sistema.