

1. ANÀLISI.

Caldrà repassar alguns temes de cursos anteriors, com el tema de "Funcions polinòmiques" i, els de "Funcions reals" i "Límits de funcions", caldrà recordar també els gràfics i propietats més importants de les funcions exponencial i logarítmica, de les funcions circulars, etc., així com saber deduir propietats observables a partir d'un gràfic.

1.1. Continuïtat de funcions.

1.1.1. Funció continua en un punt..

Direm que la funció f és continua en x_0 si verifica:

- 1) Existeix $f(x_0)$.
- 2) Existeix el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i, $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

1.1.2. Discontinuitats.

Quan una funció no és continua en un punt es diu que la funció és discontinua en aquest punt. Hi ha dos tipus de discontinuitats:

- 1) Evitables:
 - 1.a) "Existeix $f(x_0)$ i existeix $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ però no són iguals".
 - 1.b) "No existeix $f(x_0)$ però si el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ".
- 2) No evitables:
 - 2.a) de salt o de 1ª espècie: "Existeixen els límits laterals però no són iguals".
 - 2.b) asimptòtica o de 2ª espècie: "Algun dels dos límits laterals és infinit".

1.1.3. Continuïtat en un interval.

Una funció f és continua en un interval obert (a,b) si $\forall x_0 \in (a,b)$, f és continua en x_0 .

Una funció f és continua en un interval tancat $[a,b]$ si verifica:

- 1) f és continua en l'interval (a,b) , i
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

1.1.4. Teorema de Bolzano.

" Si f és una funció continua en $[a,b]$ i signe $f(a) \neq$ signe $f(b)$, aleshores $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$ "

El Teorema de Bolzano ens assegura l'existència de solucions per l'equació $f(x) = 0$, si l'expressió de $f(x)$ és una funció continua. Aquest teorema ens dona també un bon mètode per trobar solucions aproximades de l'esmentada equació, només cal reduir l'amplitud de l'interval fins que els extrems siguin molt pròxims.

1.1.5. Teorema dels valors intermitjos.

" Si f és una funció continua en $[a,b]$, leshores f pren tots els valors compresos entre $f(a)$ i $f(b)$, és a dir: $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = k$, on k és un valor comprés entre $f(a)$ i $f(b)$ ".

1.2. Derivació de funcions reals.

1.2.1. Derivada d'una funció en un punt.

" Sigui f una funció i $x_0 \in Df$, definim derivada de f en el punt x_0 al valor, si existeix, del límit $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ". En tal cas es diu que f és derivable en x_0 .

1.2.2. Interpretació geomètrica de la derivada: La recta tangent en un punt.

" La derivada d'una funció f en un punt x_0 coincideix amb el valor del pendent de la recta tangent a la corba definida per f en el punt $P(x_0, f(x_0))$ ". L'equació de la recta tangent a la corba en el punt $P(x_0, f(x_0))$ és: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

1.2.3. Càlcul de derivades.

El càlcul de derivades passa per combinar la Taula de derivades i les Regles de derivació: La derivada de la suma, del producte,....

1.2.4. Derivades laterals.

Sigui f una funció i $x_0 \in Df$, direm que f és derivable per la dreta de x_0 si existeix el límit

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ i que és } \underline{\text{derivable per l'esquerra}} \text{ de } x_0, \text{ si existeix el}$$

$$\text{límit } f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

" Una funció f és derivable en x_0 si i només si existeixen $f'(x_0^+)$ i $f'(x_0^-)$ i són iguals. El valor de $f'(x_0)$ és el valor comú de les dues derivades laterals ".

1.2.5. La continuïtat de les funcions derivables.

Teorema: " Si f és derivable en x_0 , aleshores f és continua en x_0 ".

El teorema recíproc no funciona. Un exemple senzill que ens demostra aquest fet el tenim en la funció $f(x) = |x|$ que és continua en 0 però no és derivable en aquest punt.

1.2.6. Els Teoremes de Rolle, del valor mig i de Cauchy.

Teorema de Rolle: " Si f és continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) i $f(a) = f(b)$, aleshores $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$ ".

Interpretació: Com la funció és continua en tot l'interval $[a,b]$ i és derivable en (a,b) i, les imatges dels extrems de l'interval són iguals, sempre hi haurà al menys un punt dins l'interval on la recta tangent serà paral·lela a l'eix OX.

Teorema del valor mig: " Si f és continua en $[a,b]$ i derivable en (a,b) , aleshores $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que: $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ".

Conseqüències del Teorema del valor mig:

- 1) " Si f és continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) i $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, aleshores f és constant en $[a,b]$ ".
- 2) " Si f i g són dues funcions contínues en $[a,b]$ i derivables en (a,b) tal que $(a,b), f'(x) = g'(x)$, aleshores $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ ".

Teorema de Cauchy: "Si f i g són contínues en $[a,b]$ i derivables en (a,b) , aleshores $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$."

1.2.7. La regla de l'Hopital.

En les condicions del Teorema de Cauchy,

"Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ i $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, aleshores $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$."

Observacions:

1) Aquesta regla també és vàlida pel cas indeterminat $\frac{\infty}{\infty}$.

2) Mitjançant petites transformacions, totes les indeterminacions es poden reduir a un dels dos casos: $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

1.2.8. Creixement i decreixement d'una funció: Extrems relatius.

"Una funció f és creixent [decreixent] en un punt $x_0 \in D_f$ si $\exists E_r(x_0)$ tal que es verifica:

- 1) si $x_0 - r < x < x_0$, aleshores $f(x) < f(x_0)$ [$f(x) > f(x_0)$] i,
- 2) si $x_0 < x < x_0 + r$, aleshores $f(x_0) < f(x)$ [$f(x_0) > f(x)$]."

Teorema: "Sigui f una funció derivable en x_0 , es verifica:

- 1) Si $f'(x_0) > 0$, aleshores f és creixent en x_0 .
- 2) Si $f'(x_0) < 0$, aleshores f és decreixent en x_0 ."

Observació: Aquest teorema ens dona una condició suficient perquè una funció sigui creixent o decreixent en un punt, però no necessària, ja que pot succeir que sigui creixent o decreixent en el punt i que la derivada sigui nul·la.

Una funció f és creixent (o decreixent) en un interval (a,b) si per qualsevol punt de l'interval la funció f en aquest punt és creixent (o decreixent).

"Direm que la funció f té un màxim [mínim] relatiu en $x_0 \in (a,b)$ si $\forall x \in E_r(x_0) \subset (a,b)$, $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$]."

Regla pràctica per determinar extrems relatius: "Sigui f una funció que té derivada segona en el seu domini i tal que $f'(x_0) = 0$. Es verifica:

- 1) Si $f''(x_0) < 0$, aleshores f té un màxim relatiu en x_0 .
- 2) Si $f''(x_0) > 0$, aleshores f té un mínim relatiu en x_0 ."

1.2.9. Funcions cònques i convexes: Punts d'inflexió.

Teorema: "Sigui f una funció amb segona derivada en x_0 ,

- 1) Si $f''(x_0) > 0$, aleshores f és convexa en x_0 .
- 2) Si $f''(x_0) < 0$, aleshores f és còncaua en x_0 ."

Una funció f és convexa (o còncaua) en un interval (a,b) si per qualsevol punt de l'interval la funció f en aquest punt és convexa (o còncaua). Els punts que separen concavitats de convexitats reben el nom de punts d'inflexió.

Regla pràctica per determinar punts d'inflexió: "Sigui f una funció que té derivada segona en el seu domini i tal que $f''(x_0) = 0$. Si $f'''(x_0) \neq 0$, aleshores f té un punt d'inflexió en x_0 ."

1.2.10. Representació gràfica de funcions.

Per estudiar i representar una funció $y = f(x)$, cal tenir present els següents apartats:

1. El domini de la funció.
2. Continuitat.
3. Simetries respecte de l'eix OY i respecte de l'origen de coordenades.
4. Els intervals de creixement i de decreixement, i els extrems relatius.
5. Els intervals de concavitat i de convexitat, i els punts d'inflexió.
6. Les asímptotes.
7. Els punts de tall als eixos de coordenades i, si cal, altres punts auxiliar.

Cal recordar que hi ha tres tipus d'asímptotes: asímptotes verticals, asímptotes horitzontals i asímptotes obliqües.

1) Les asímptotes verticals s'obtenen de fer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, i la seva equació és $x = a$.

2) Les asímptotes horitzontals s'obtenen de fer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, i la seva equació és $y = b$.

3) Les asímptotes obliqües són de la forma $y = mx + n$, on $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$ essent m i n nombres reals i, $m \neq 0$.

1.2.11. Problemes d'optimització.

Es pretén buscar la solució òptima (màxima o mínima) d'un problema a partir d'unes condicions inicials. La seva resolució passa per tenir en compte la regla pràctica, donada en l'apartat 3.2.8., per determina extrems relatius.

1.3. Integració de funcions reals.**1.3.1. Funcions primitives: La integral indefinida.**

Direm que $F(x)$ és una funció primitiva de $f(x)$ sempre que $F'(x) = f(x)$. Donada una funció $f(x)$, existeixen una infinitat de funcions primitives, totes elles es diferencien en una constant.

Anomenem integral indefinida de $f(x)$ al conjunt de totes les seves funcions primitives, això ho indiquem així: $\int f(x) dx = F(x) + C$, on $F(x)$ és una funció primitiva de $f(x)$.

Propietats:

- 1) $\int (f \pm g)(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- 2) $\int (k \cdot f)(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

1.3.2. Càlcul d'integrals immediates i quasi-immediates.

El càlcul d'integrals immediates i quasi-immediates passa per tenir en compte les Taules d'integrals i les propietats 1 i 2 de l'apartat anterior.

1.3.3. Alguns mètodes d'integració.

Quan les integrals no són immediates, existeixen mètodes que permeten resoldre-les. Entre aquests mètodes en tenim: el mètode de substitució o canvi de variable i el mètode d'integració per parts.

1) Metòde de substitució o canvi de variable: Aquest mètode passa per fer un canvi de la variable x . Si fem $x = g(t)$, la integral es transformaria en $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$.

2) El mètode d'integració per parts: Aquest mètode passa per aplicar la fórmula

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

3) Integrals racionals: Són del tipus: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ on $P(x)$ i $Q(x)$ són dos polinomis. Pot passar:

1. Si grau $P(x) \geq$ grau $Q(x)$, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$, on $C(x)$ i $R(x)$ són el quocient i el residu de la divisió de $P(x)$ i $Q(x)$ i, en tal cas grau $R(x) <$ grau $Q(x)$.
2. Si grau $P(x) <$ grau $Q(x)$, descomposarem $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fraccions simples.

1.3.4. La integral definida: La Regla de Barrow.

Segui $f(x)$ una funció definida dins l'interval $[a, b]$ i, $F(x)$ una de les seves primitives. Definim la integral definida de f entre els valors a i b com el valor $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, fórmula que es coneix amb el nom de Regla de Barrow.

Propietats:

- 1) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, on $a < c < b$.
- 2) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
- 3) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- 4) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$

1.3.6. Càlcul d'àrees planes, volums de revolució i longituds d'arcs de corba.

La interpretació geomètrica de la integral definida d'una funció dins un interval és: "Si f és una funció que pren valors positius dins l'interval $[a, b]$, la integral definida de f entre els valors a i b és l'àrea del recinte pla limitat pel gràfic de la funció, l'eix OX i les verticals $x = a$ i $x = b$ ".

-Càlcul d'àrees planes: Tenint en compte aquesta interpretació, tenim:

- 1) Si $f \geq 0$, l'àrea del recinte limitat pel gràfic, l'eix OX i les verticals $x = a$ i $x = b$ és:
 $A = \int_a^b f(x) dx$.
- 2) Si $f < 0$, l'àrea del recinte limitat pel gràfic, l'eix OX i les verticals $x = a$ i $x = b$ és:
 $A = -\int_a^b f(x) dx$.
- 3) Si f pren valors positius i negatius dins l'interval $[a, b]$ i $c \in [a, b]$ és el valor que separa valors positius de negatius de la funció f , aleshores l'àrea ve definida per:
 $A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

-Càlcul de volums de revolució: El volum generat pel gràfic de la funció f entre els valors a i b al girar el gràfic entorn l'eix OX ve donat per la fórmula: $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

-Càlcul de la longitud d'arc de corba: La longitud de l'arc de corba definit pel tros del gràfic de f entre els valors a i b ve donat per la fórmula: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.