

FUNCIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMQUES.

1. Funcions exponencials.
2. Equacions exponencials.
3. Definició de logaritme. Propietats.
4. Funcions logarítmiques.
5. Equacions logarítmiques.

1. Funcions exponencials.

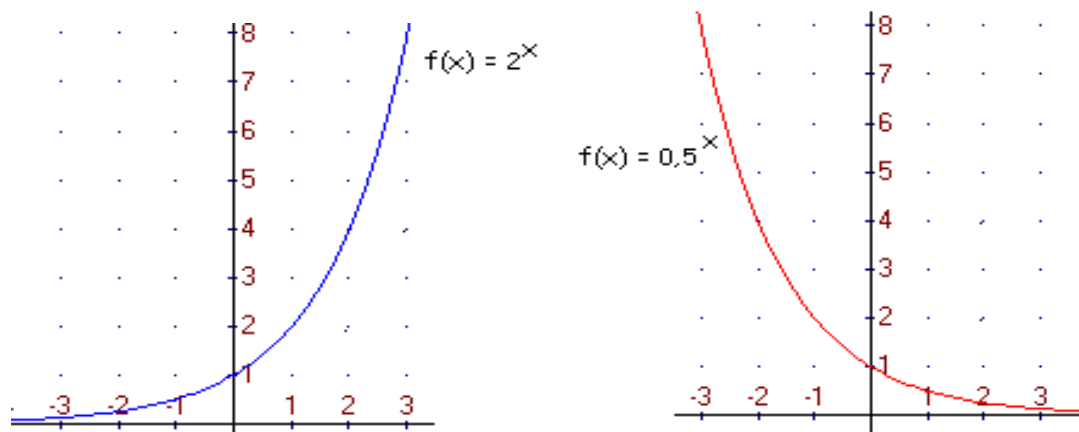
Les funcions del tipus $f(x) = a^x$, on $a > 0$, s'anomenen **funcions exponencials de base a**.

Les funcions exponencials tenen les següents propietats característiques:

- 1) El seu domini sempre és $\mathbb{R}$.
- 2) Són funcions contínues.
- 3) El seu gràfic talla sempre a l'eix d'ordenades en el punt $(0,1)$, ja que $f(0) = a^0 = 1$.
- 4) El seu gràfic no talla mai a l'eix d'abscisses, ja que $f(x) = a^x > 0$ per qualsevol valor de x .
- 5) Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ és creixent, i per a valors de x molt grans i negatius el gràfic s'apropa indefinidament a l'eix d'abscisses sense arribar mai a tocar-lo.
- 6) Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ és decreixent, i per a valors de x molt grans i positius el gràfic s'apropa indefinidament a l'eix d'abscisses sense arribar mai a tocar-lo.

Exemple:

- 1) Els gràfics adjunts corresponen a les funcions exponencials $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 0,5^x$. En ells es poden observar les propietats mencionades anteriorment:



El camp d'aplicació de les funcions exponencials és molt ampli. En els exercicis següents veurem alguna de les seves aplicacions.

2. Equacions exponencials.

Les equacions que tenen la incògnita en l'exponent d'una potència reben el nom d'equacions exponencials. La seva resolució passa per aconseguir arribar a una igualtat de potències d'igual base i aplicar la propietat: $a^x = a^y \Rightarrow x = y$.

Exemples:

2) $5^{2x-6} = 625$.

Com $625 = 5^4$, tenim que: $5^{2x-6} = 5^4$, d'on $2x-6 = 4$, i d'aquí que $x = 5$.

3) $3^{x+1} + 3^x - 3^{x-1} = 351$.

$3 \cdot 3^x + 3^x - 1/3 \cdot 3^x = 351$, traient 3^x factor comú, tenim: $3^x \cdot (3 + 1 + 1/3) = 351$,

d'on $3^x \cdot 13/3 = 351$, i d'aquí que $3^x = 81$, i com $81 = 3^4$, tenim que $3^x = 3^4$ i per tant $x = 4$.

4) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Aquesta equació es pot reduir a una equació de segon grau fent $2^x = t$. D'aquesta manera tenim: $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Resolent-la obtenim que $t_1 = 2$ i $t_2 = 4$.

Fent $t_1 = 2 = 2^x$, obtenim que $x = 1$, i fent $t_2 = 4 = 2^2 = 2^x$, obtenim que $x = 2$.

Per tant, tenim dues solucions: $x = 1$ i $x = 2$.

4. Definició de logaritme. Propietats.

Sigui $a > 0$, definim logaritme en base a d'un nombre real N com l'exponent x al qual s'ha d'eleva la base a per tal d'obtenir N , és a dir,

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Observacions:

- 1) El símbol $\log_a N$ es llegeix "logaritme en base a de N ".
- 2) Si la base és 10 ($a = 10$), diem que és un **logaritme decimal**, i si la base és e ($a = e$), diem que és un **logaritme neperià**. A partir d'ara, els **logaritmes decimals** els indicarem per **log x** (sense especificar la base) i els **logaritmes neperians** per **ln x**.

Exemples: Fent ús de la definició de logaritme, determineu el valor de:

5) $\log_2 64 = x$

Per definició $2^x = 64$ i com $64 = 2^6$, tenim que $x = 6$.

6) $\log_3 \sqrt{27} = x$

Tenim que $3^x = \sqrt{27}$, i $\sqrt{27} = 3^{3/2}$, d'aquí que $x = 3/2$.

7) $\log_{10} 0,00001 = x$

Tenim que $10^x = 0,00001$, i que $0,00001 = 10^{-5}$, d'aquí que $x = -5$.

8) $\log_5 (1/125) = x$

Tenim que $5^x = 1/125$. Com $1/125 = 5^{-3}$, tenim que $x = -3$.

Com a conseqüència immediata d'aquesta definició tenim les següents propietats:

- 1) $\log_a a^x = x$; com a cas particular: $\log_a a = 1$ i $\log_a 1 = 0$.
- 2) $a^{\log_a x} = x$.

Altres propietats importants dels logaritmes són:

- 1) $\log_a N \cdot M = \log_a N + \log_a M$.
- 2) $\log_a N/M = \log_a N - \log_a M$.
- 3) $\log_a N^n = n \cdot \log_a N$.
- 4) $\log_a \sqrt[n]{N} = 1/n \cdot \log_a N$.
- 5) Canvi de base: $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

Demostracions: Sigui $\log_a N = x$ i $\log_a M = y$. De la definició de logaritme tenim que:
 $a^x = N$ i $a^y = M$.

$$1) \log_a N \cdot M = \log_a a^x \cdot a^y = \log_a a^{x+y} = x+y = \log_a N + \log_a M.$$

$$2) \log_a N/M = \log_a a^x/a^y = \log_a a^{x-y} = x-y = \log_a N - \log_a M.$$

$$3) \log_a N^n = \log_a (a^x)^n = \log_a a^{n \cdot x} = n \cdot x = n \cdot \log_a N.$$

$$4) \log_a \sqrt[n]{N} = \log_a (a^x)^{1/n} = \log_a a^{x/n} = x/n = 1/n \cdot x = 1/n \cdot \log_a N.$$

5) Com $a^x = N$, traient logaritmes en base b en els dos membres de la igualtat, tenim:
 $\log_b a^x = \log_b N$, és a dir: $x \cdot \log_b a = \log_b N$. D'aquí que $x = \frac{\log_b N}{\log_b a}$, i en conseqüència:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Exemple:

9) Sabent que $\log 2 = 0,301030$ i $\log 3 = 0,477121$, calculeu, fent servir les propietats, el valor dels següents logaritmes: $\log 6$, $\log 0,2$, $\log 25$, $\log \sqrt{18}$ i $\log_2 3$.

$$\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 0,301030 + 0,477121 = 0,778151.$$

$$\log 0,2 = \log 2/10 = \log 2 - \log 1 = 0,301030 - 1 = -0,698970.$$

$$\log 25 = \log 100/4 = \log 100 - \log 4 = \log 10^2 - \log 2^2 = 2 \cdot \log 10 - 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0,301030 = 1,397940.$$

$$\log \sqrt{18} = 1/2 \cdot \log 2 \cdot 3^2 = 1/2 \cdot (\log 2 + 2 \cdot \log 3) = 1/2 \cdot (0,301030 + 2 \cdot 0,477121) = 1/2 \cdot 1,255272 = 0,627636.$$

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477121}{0,301030} = 1,584962.$$

5. Funcions logarítmiques.

Sigui $a > 0$, definim la **funció logarítmica en base a** com aquella que a cada nombre x li fa correspondre el seu logaritme en base a , és a dir, $f(x) = \log_a x$.

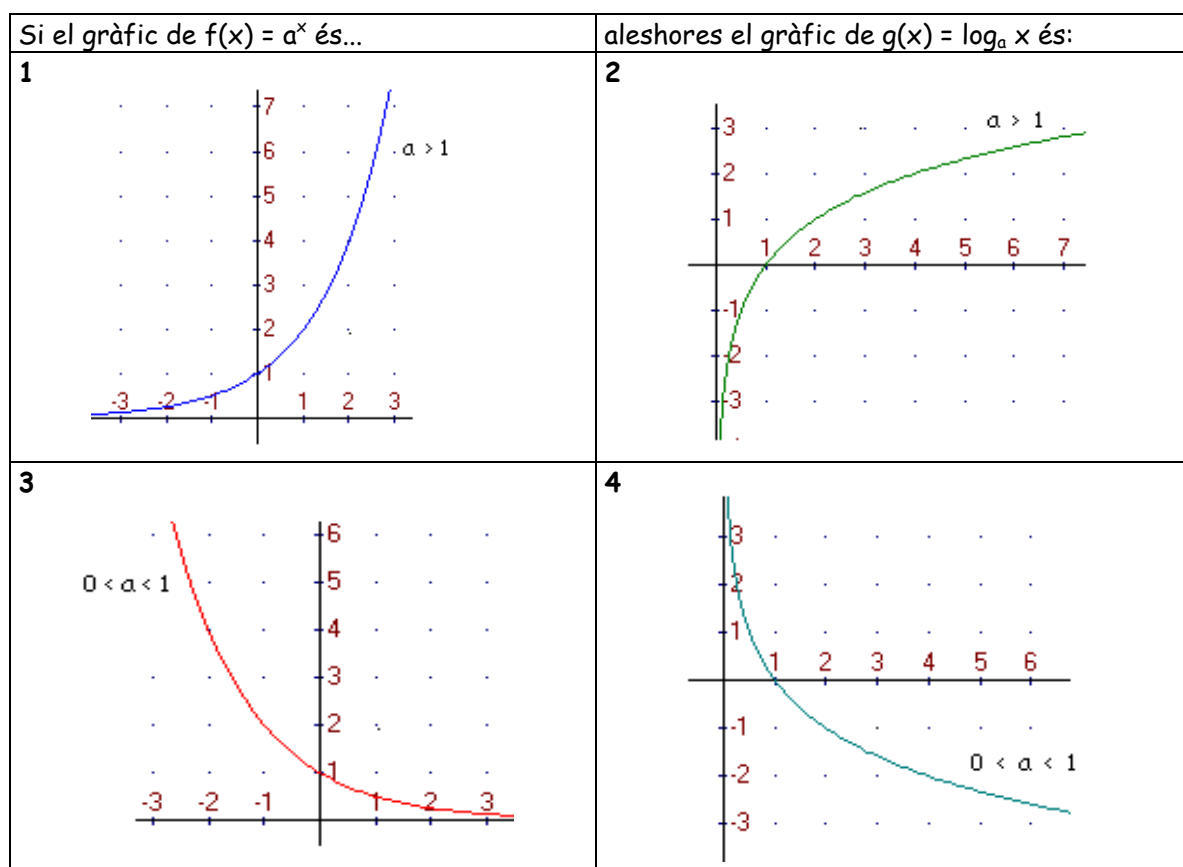
Exemple:

10) Les funcions $f(x) = \log x$ i $g(x) = \ln x$ són les funcions logarítmiques de base **10** i de base **e** respectivament.

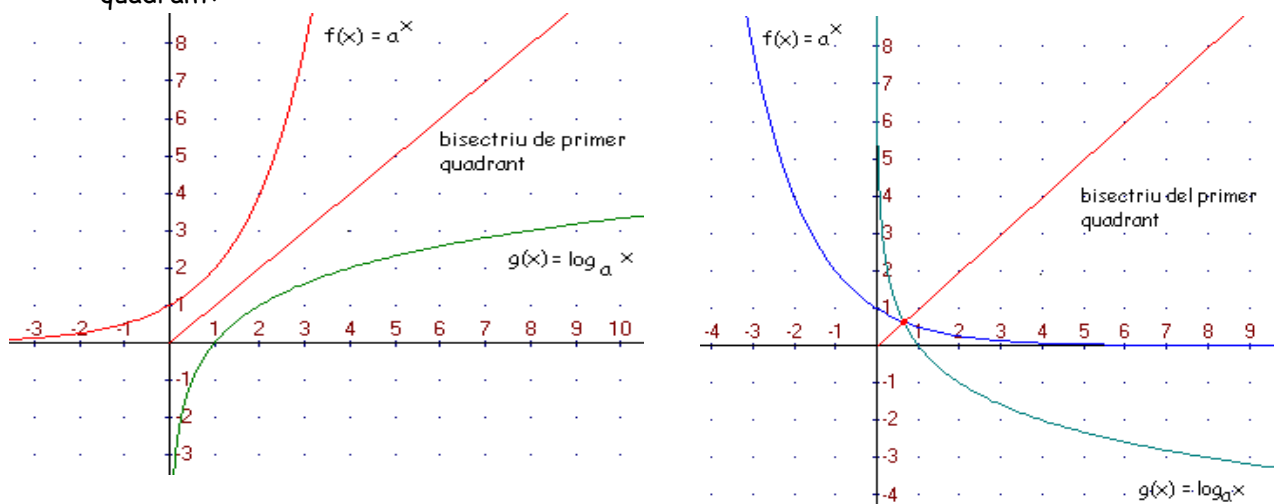
Diem que dues funcions f i g són **funcions inverses** si es verifica que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

La funció logarítmica de base a és la funció inversa de la funció exponencial de base a , és a dir, si $f(x) = a^x$ i $g(x) = \log_a x$, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Aquest fet, queda reflectit en que ambdues funcions tenen el seu gràfic simètric respecte de la bisectriu del primer quadrant, és a dir:



Observeu la simetria dels gràfics 1 i 2 i dels gràfics 3 i 4 respecte de la bisectriu del primer quadrant:



Les característiques d'una funció logarítmica són:

- 1) El domini sempre és $(0, +\infty)$.
- 2) Són funcions contínues.
- 3) Tallen l'eix OX en el punt $(1,0)$, és a dir $\log_a 1 = 0$, i no tallen mai a l'eix OY.

- 4) Si $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ és creixent.
- 5) Si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ és decreixent.
- 6) Per a valors positius de x i molt propers a 0, el gràfic de la funció s'apropa indefinidament a l'eix d'ordenades, sense arribar a tocar-lo.

6. Equacions logarítmiques.

Les equacions que tenen la incògnita afectada per un logaritme reben el nom d'equacions logarítmiques. La seva resolució passa per aplicar propietats dels logaritmes fins aconseguir arribar a una igualtat de logaritmes d'igual base i aplicar la propietat: $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$.

Exemples:

11) $\log(x+1) = 2 \cdot \log(x-1)$.

$\log(x+1) = \log(x-1)^2 \Rightarrow x+1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$
d'on $x = 0$ i $x = 3$. Ara bé, $x = 0$ no té sentit ja que si substituïm a l'equació original ens surt un logaritme d'un nombre negatiu i això no existeix. L'altra sí que té sentit, i per tant, la solució és $x = 3$.

12) $\log(x+2) - \log(x-2) = 2$.

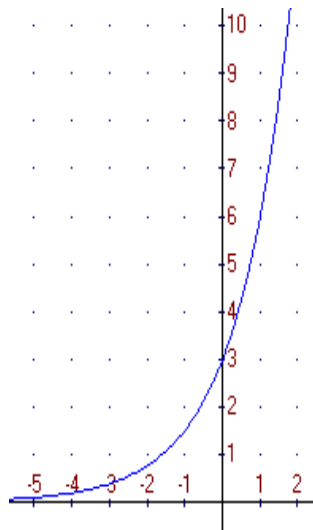
$\log \frac{x+2}{x-2} = \log 10^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = 100 \Rightarrow x+2 = 100x - 200$, d'on $99x = 198$ i per tant, $x = 2$, ara bé, aquesta solució no té sentit ja que si substituïm a l'equació original ens surt un logaritme de zero que no existeix.

EXERCICIS DE REFORÇ

1. Dibuixeu les funcions $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \log_3 x$, i doneu les seves característiques més importants.
2. L'any 1990 una ciutat tenia 3 milions d'habitants. Cada any es produeix un increment d'un 2% sobre la població de l'any anterior. Es demana:
 - a) Esbrineu la fórmula que ens dona la població segons els anys que passen. Quants habitants tenia aquesta ciutat l'any 2000?
 - b) Quants anys hauran de passar per tal que la població es dupliqui? El temps necessari per duplicar la població depèn de la població inicial? Per què?
3. Un capital de 500 euros s'ha dipositat en una llibreta d'estalvis a interès compost. Si després de 2 anys el saldo de la llibreta ha estat de 556,51 euros, quin tant d'interès ens està oferint el banc?
4. Utilitzeu la definició de logaritme per tal de calcular el valor de:

a) $\log_3 243$	b) $\log 0,000001$
c) $\log_{0,1} 10$	d) $\log_2 128$
e) $\log_{1/2} 8$	

5. Sabent que $\log 2 = 0,301030$ i $\log 7 = 0,845098$, utilitzeu les propietats dels logaritmes per calcular:
- $\log 14$
 - $\log 3,5$
 - $\log 490$
 - $\log \sqrt{0,07}$
 - $\log_2 7$
6. Resoleu les següents equacions exponencials:
- $2^{2x-4} = 256$
 - $10^{x-2} + 10^x = 1010$
 - $3^{x-2} = 27^{x+2}$
 - $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$
7. Resoleu les següents equacions logarítmiques:
- $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$
 - $\log(x+2) - \log(x+1) = 2$
 - $2 \cdot \ln(x+1) = \ln(x+5) + \ln(x-2)$
 - $\log x = \log(5x-2) - \log(x+2)$
8. A partir del gràfic de la funció $f(x) = 2^x$, dibuixeu els gràfics de les funcions: $g(x) = 2^{x+1}$ i $h(x) = 2^x + 1$.
9. A partir del gràfic de la funció $f(x) = \log_2 x$, dibuixeu els gràfics de les funcions: $g(x) = \log_2(x+1)$ i $h(x) = \log_2 x + 1$.
10. a) Si $f(x) = k \cdot a^x$, esbrineu els valors de k i a per tal que el gràfic de la funció sigui:



- b) Tenint en compte els valors d'aquests dos paràmetres, dibuixeu el gràfic de la funció $g(x) = k \cdot \log_a x$.