

## FUNCIONS REALS.

1. El concepte de funció.
2. Domini i recorregut d'una funció.
3. Característiques generals d'una funció.
4. Funcions definides a intervals.
5. Operacions amb funcions.
6. Les successions com a funcions.

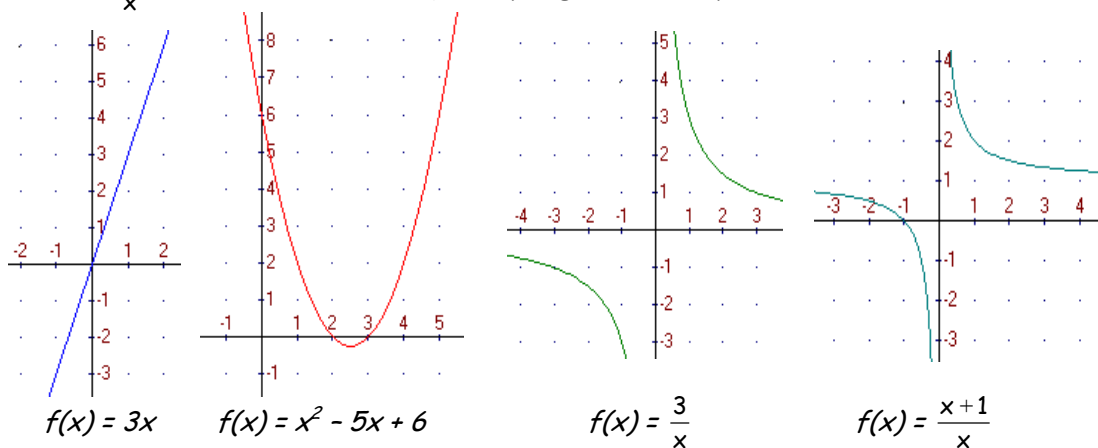
### 1. El concepte de funció.

Una funció és una relació entre dues variables  $x$  i  $y$  tal que a cada valor de la variable  $x$  (variable independent) li correspon un valor de la variable  $y$  (variable dependent).

La notació que fem servir per a indicar una funció és:  $y = f(x)$ , on  $f(x)$  és una expressió algebraica que depèn de la variable  $x$  i que anomenem imatge de  $x$  per la funció  $f$ .

#### Exemples:

- 1)  $f(x) = 3x$ , o bé  $y = 3x$  és la funció que relaciona cada valor de  $x$  amb el triple d'aquest valor. Sabem del curs passat que aquesta funció representa una recta que passa per l'origen de coordenades de pendent 3.
- 2)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  és una funció que representa una paràbola.
- 3)  $f(x) = \frac{3}{x}$  és una funció de proporcionalitat inversa que tenen per gràfic una hipèrbola.
- 4)  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  és també una funció que té per gràfic una hipèrbola.



El gràfic d'una funció  $f$  està format per tots els punts de coordenades  $(x, f(x))$ . Diem que un punt  $(x_0, y_0)$  és del gràfic d'una funció  $f$  si es verifica que  $y_0 = f(x_0)$ .

### 2. Domini i recorregut d'una funció.

El **domini** d'una funció  $f$  és el conjunt de valors de la variable independent que tenen imatge.

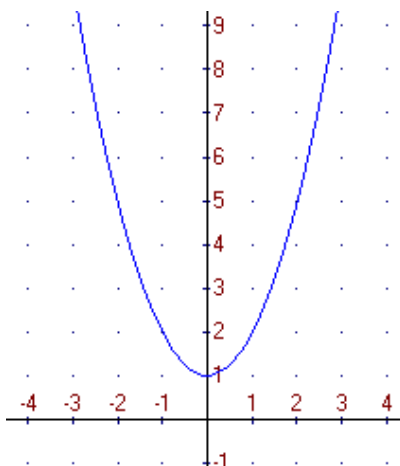
El **recorregut** d'una funció és el conjunt de valors de la variable dependent que són imatges d'algun valor de la variable independent.

**Exemples:**

5) La funció  $f(x) = \frac{1}{x}$  té domini  $Df = \mathbb{R} - \{0\}$ , ja que el valor 0 de la variable  $x$  és l'únic valor que no té imatge.

El recorregut s'obté:  $y = \frac{1}{x} \rightarrow x \cdot y = 1 \rightarrow x = \frac{1}{y}$ , perquè aquesta  $x$  existeixi cal que  $y \neq 0$ , d'aquí que el recorregut sigui  $Rf = \mathbb{R} - \{0\}$ .

6) La funció  $f(x) = x^2 + 1$  té domini  $Df = \mathbb{R}$  i recorregut  $Rf = [1, +\infty)$ . Això es fàcilment observable en el gràfic de la funció.



### 3. Característiques generals d'una funció.

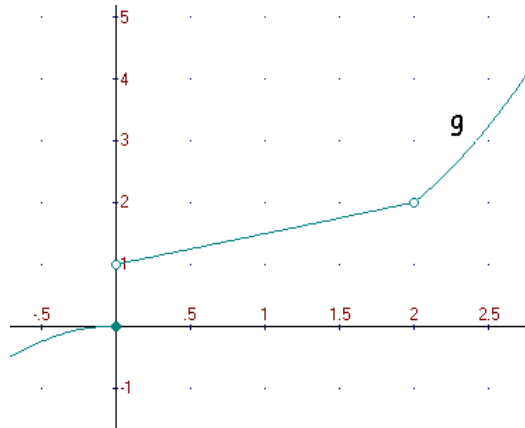
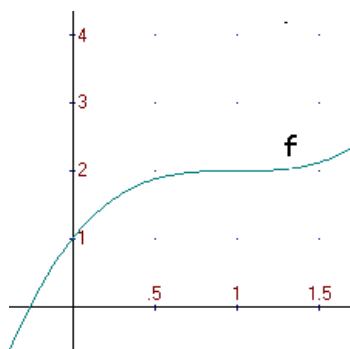
#### 3.1. Continuïtat i discontinuïtat.

Les funcions que tenen un gràfic que es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper s'anomenen **funcions contínues**, contràriament, les **funcions discontinues** no es poden dibuixar d'un sol traç.

Els valors de la variable  $x$  on hem d'aixecar el llapis del paper per a poder fer el gràfic de la funció s'anomenen **punts de discontinuïtat**.

**Exemple:**

7) El gràfic de la funció  $f$  ens diu que aquesta funció és contínua, mentre que el gràfic de la funció  $g$  ens diu que aquesta funció és discontinua en 0 i 2.

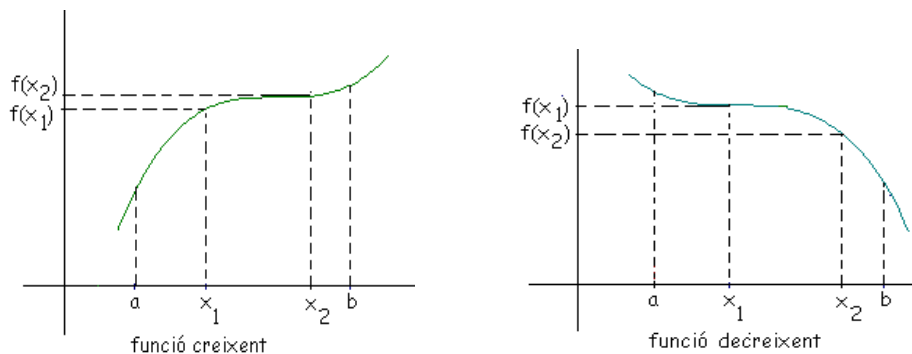


### 3.2. Creixement i decreixement. Màxims i mínims relatius.

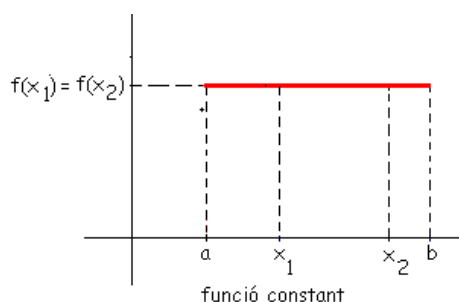
Direm que una funció  $f$  és **creixent** en un interval obert  $(a,b)$  si per a qualsevol  $x_1$  i  $x_2$  de  $(a,b)$ ,  $x_1 < x_2$ , aleshores  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Direm que una funció  $f$  és **decreixent** en un interval obert  $(a,b)$  si per a qualsevol  $x_1$  i  $x_2$  de  $(a,b)$ ,  $x_1 < x_2$ , aleshores  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Gràficament seria:

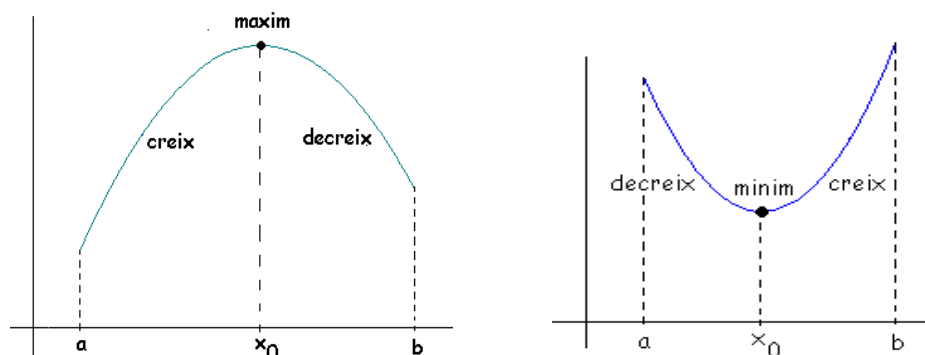


Una funció es diu que és **constant** en l'interval  $(a,b)$  si per a qualsevol  $x_1$  i  $x_2$  de  $(a,b)$  es verifica que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Gràficament seria:



Direm que en  $x = x_0$  la funció té un **màxim relatiu** si en aquest punt la funció passa de ser creixent a ser decreixent, i direm que en  $x = x_0$  la funció té un **mínim relatiu** si en aquest punt la funció passa de ser decreixent a ser creixent.

Gràficament seria:



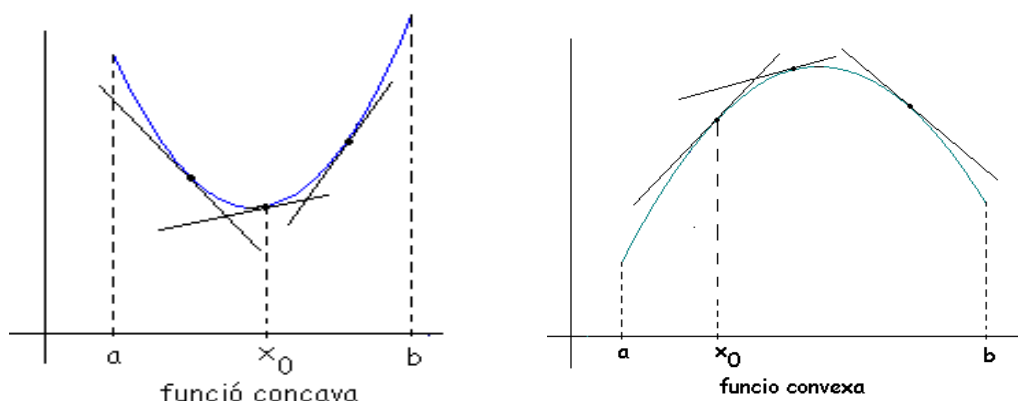
Els màxims i els mínims relatius també se'ls coneix com a **extrems relatius**.

### 3.3. Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.

Una funció és **còncava** en l'interval obert  $(a,b)$  si totes les tangents al gràfic en un punt  $x_0$  de  $(a,b)$  queden per sota del gràfic.

Una funció és **convexa** en l'interval obert  $(a,b)$  si totes les tangents al gràfic en un punt  $x_0$  de  $(a,b)$  queden per sobre del gràfic.

Gràficament seria:



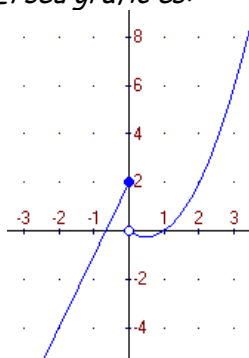
El punt que separa una concavitat d'una convexitat rep el nom de **punt d'inflexió**. En aquest punt la recta tangent travessa el gràfic.

## 4. Funcions definides a intervals.

Les funcions definides a intervals són funcions que estan definides per dues o més funcions, cadascuna amb el seu propi domini.

### Exemple:

8) La funció  $f$  que està definida com a  $f(x) = 3x + 2$  si  $x \leq 0$  i  $f(x) = x^2 - x$  si  $x > 0$  és una funció definida a intervals. El seu gràfic és:



## 5. Operacions amb funcions.

### 5.1. Suma i resta de funcions.

Si  $f$  i  $g$  són dues funcions, la funció suma es defineix com la funció que a cada valor de la variable  $x$  li correspon la suma de les imatges d'ambdues funcions, és a dir:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Anàlogament podem definir la funció resta. Així, tenim que:  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ .

**Exemple:**

9) Si  $f(x) = x^2 + 1$  i  $g(x) = 2x - 3$ , la funció suma és  $(f + g)(x) = x^2 + 1 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 2$ , mentre que la funció resta és  $(f - g)(x) = x^2 + 1 - (2x - 3) = x^2 - 2x + 4$ ,

**5.2. Producte i quocient de funcions.**

Si  $f$  i  $g$  són dues funcions, la funció producte es defineix com la funció que a cada valor de la variable  $x$  li correspon el producte de les imatges d'ambdues funcions, és a dir:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Anàlogament podem definir la funció quocient. Així, tenim que:  $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**COMPTE!** La funció quocient no té sentit si  $g(x) = 0$ , el que ens permet determinar fàcilment quin és el seu domini.

**Exemple:**

10) Si  $f(x) = x^2 + 1$  i  $g(x) = 2x - 3$ , la funció producte és  $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1)(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ , mentre que la funció quocient és  $(f/g)(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}$ . La funció quocient no té sentit per a  $x = 3/2$ , per tant el seu domini és  $D_{f/g} = \mathbb{R} - \{3/2\}$ .

**5.3. Composició de funcions.**

Si  $f$  i  $g$  són dues funcions, la funció "f composta amb g", que la indicarem per  $g \circ f$ , es defineix com la funció que a cada valor de la variable  $x$  li correspon la imatge  $g(f(x))$ , és a dir:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

La funció "g composta amb f" i que indiquem per  $f \circ g$  la definim com  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . És fàcil comprovar que aquesta operació no és commutativa, és a dir:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x).$$

**Exemple:**

11) Si  $f(x) = 2x - 3$  i  $g(x) = x^2$ , les funcions compostes són:

$$(g \circ f)(x) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = 2x^2 - 3.$$

Com podem comprovar,  $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ .

12) Si  $f(x) = \sqrt{x+1}$  i  $g(x) = x^2 + 3$ ,

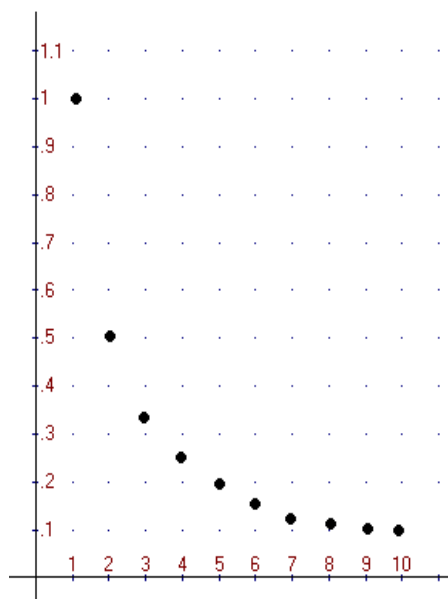
$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 + 3 = x + 1 + 3 = x + 4.$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 3) = \sqrt{(x^2 + 3) + 1} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Com podem comprovar,  $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ .

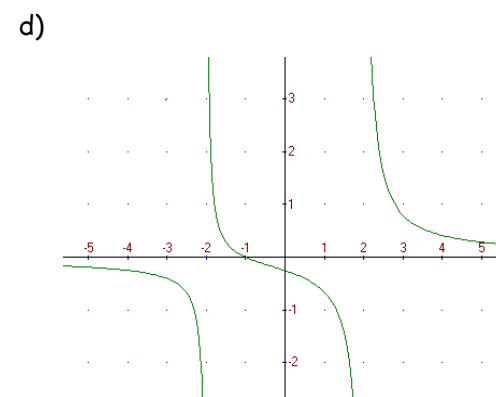
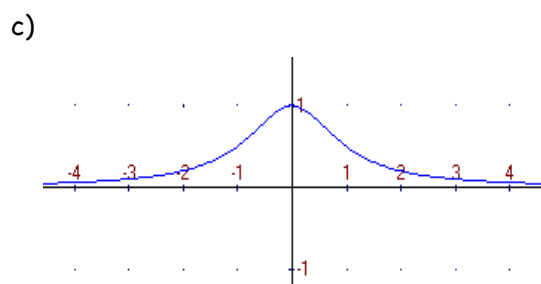
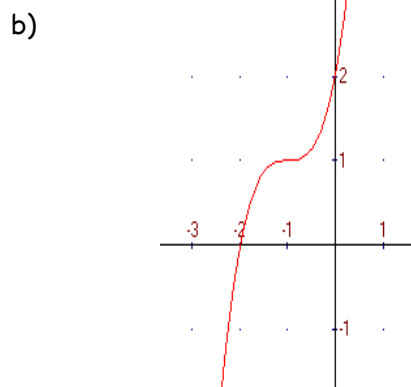
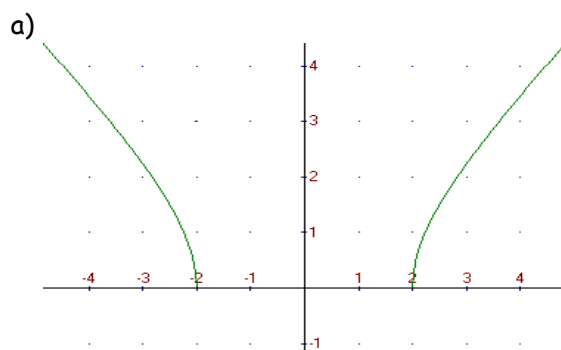
**6. Les successions com a funcions.**

Una successió es pot definir com a una funció de domini  $\mathbb{N}$  i per tant es pot representar com a tal. Així, per exemple, la successió de terme general  $a_n = 1/n$  té per gràfic:



### EXERCICIS DE REFORÇ

1. Trobeu el domini i el recorregut de les funcions:



2. Trobeu el domini de les següents funcions:

a)  $f(x) = x^2 + 3x - 7$

b)  $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$

d)  $f(x) = \sqrt{x+1}$

e)  $f(x) = \sqrt{5x-6}$

3. En el gràfic adjunt tenim representades dues funcions, una funció  $f(x)$  de proporcionalitat directa i una altra funció  $g(x)$  quadràtica.

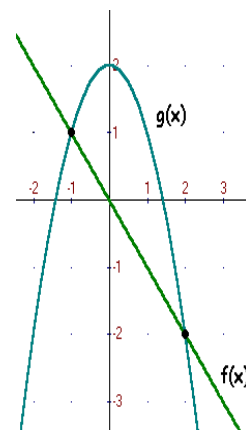
Es demana:

a) Per quins valors de  $x$ ,  $f(x) > 1$ ? I  $f(x) < -1$ ?

b) Per quins valors de  $x$ ,  $g(x) > 1$ ? I  $g(x) < -1$ ?

c) Per quins valors  $f(x) = g(x)$ ?

d) Trobeu les expressions de  $f(x)$  i de  $g(x)$ .



4. En un aparcament de cotxes cobren la següent tarifa:

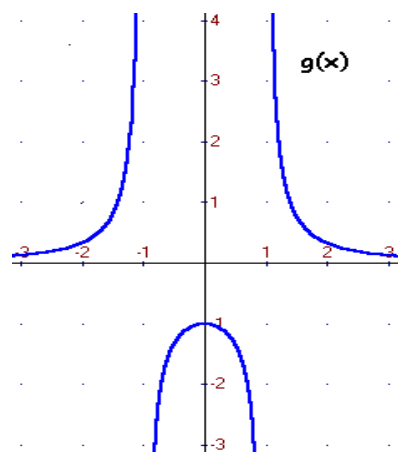
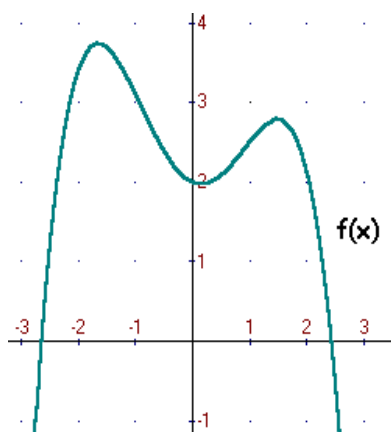
La primera hora o fracció: 225 ptes.

Les hores restants o fracció: 175 ptes.

a) Fes una taula per a les 3 primers hores d'estada a l'aparcament calculant el preu de 20 minuts en 20 minuts. Representeu el gràfic de la funció a partir de les dades obtingudes.

b) Quina és l'expressió d'aquesta funció? És continua? Per què?

5. Donats els gràfics de les funcions  $f(x)$  i  $g(x)$ , trobeu els intervals on cada una de les funcions és creixent o decreixent, és còncava o convexa, i indiqueu les coordenades dels punts on s'observa extrems relatius o punts d'inflexió.



6. Suposem que l'impost de circulació de cotxes en un determinat país es paga segons una quota fixa de 5000 ptes més la taxa que s'indica en la taula adjunta:

| Preu del cotxe en ptes.               | Taxa |
|---------------------------------------|------|
| Fins a 1500000 ptes                   | 10%  |
| Més de 1500000 i fins a 4000000 ptes. | 15%  |
| Més de 4000000 ptes                   | 20%  |

- a) Quin és l'impost de circulació d'un cotxe de 1750000 ptes?. I per un de 3000000 ptes?.
- b) Trobeu l'expressió de la funció que ens dona l'impost de circulació segons el preu del cotxe.
- c) Representeu-la i indiqueu si és o no continua.
7. Representeu la funció  $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ . És continua?. Per què?.
8. Donades les funcions  $f(x) = 3x^2 - x$  i  $g(x) = x^2 - 1$ , calculeu les expressions de les funcions:
- a)  $(f + g)(x)$ ,
- b)  $(f - g)(x)$ ,
- c)  $(f \cdot g)(x)$ ,
- d)  $(f/g)(x)$  i
- e)  $(g \circ f)(x)$ ,
- i indiqueu en cada cas el seu domini.
9. Donades les funcions  $f(x) = \sqrt{x+2}$  i  $g(x) = 3x^2 - 1$ , es demana:
- a) Trobeu les expressions de les funcions compostes  $(g \circ f)(x)$  i  $(f \circ g)(x)$ .
- b) La composició de funcions és commutativa? Justifiqueu la vostra resposta.
10. Representeu gràficament les successions següents:
- a)  $a_n = 3n - 2$ .
- b)  $b_n = 2^{n-1}$ .
- c)  $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$