

3. GEOMETRIA.

3.1. Definicions.

Siguin $P(x_0, y_0, z_0)$ i $Q(x_1, y_1, z_1)$ dos punts de l'espai, les components del vector $\vec{PQ}$ venen donades per $\vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ i, les coordenades del punt mig del segment PQ per

$$M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right).$$

Dos vectors que tinguin iguals les seves components s'anomenen equipolents; tots els vectors equipolents entre si formen una classe a la que anomenem vector lliure, aquest es pot aplicar en qualsevol origen i manté sempre les mateixes components.

3.2. Productes escalar, vectorial i mixt.

3.2.1. Producte escalar de dos vectors.

Anomenem producte escalar de dos vectors lliures u i v al n° real definit per $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \alpha$, on α és l'angle determinat per u i v .

Es demostra que si les components de u i v són $u = (a, b, c)$ i $v = (a', b', c')$, aleshores $u \cdot v = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$ i, $|u| = a^2 + b^2 + c^2$.

Una propietat del producte escalar que cal tenir present és: "Si u i v són dos vectors perpendiculars, aleshores $u \cdot v = 0$ ".

3.2.2. Producte vectorial de dos vectors.

Anomenem producte vectorial de dos vectors lliures $u = (a, b, c)$ i $v = (a', b', c')$ al vector definit per:

$$u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Dues propietats importants que cal tenir present del producte vectorial són:

1) El vector $u \wedge v$ és sempre perpendicular als vectors u i v .

2) $|u \wedge v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \alpha$, on α és l'angle determinat per u i v .

i la interpretació geomètrica d'aquesta darrer propietat és: "El mòdul del producte vectorial dels vectors u i v és igual a l'àrea del paral·lelogram definit per aquests dos vectors amb origen comú". D'aquesta interpretació es pot deduir que: "L'àrea d'un triangle de vèrtexs A,

B i C en l'espai ve donat per: $A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right|$ ".

3.2.3. Producte mixt de tres vectors.

El producte mixt de tres vectors u, v i w es defineix com el producte escalar del primer vector pel producte vectorial dels altres dos, és a dir, $u \cdot (v \wedge w)$.

Es fàcil demostrar que: $u \cdot (v \wedge w) = \det(u, v, w)$, és a dir, que si $u = (a, b, c)$, $v = (a', b', c')$ i $w = (a'', b'', c'')$, aleshores:

$$u \cdot (v \wedge w) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

"La interpretació geomètrica del producte mixt, en valor absolut, és el volum del paral·lelepípede construït sobre els tres vectors". D'aquesta interpretació es pot deduir que:

"El volum del tetràedre de vèrtexs A, B, C i D ve donat per: $V_{\text{tetràedre}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) \right|$ ".

3.3. Equacions del pla i de la recta en l'espai.

3.3.1. Equacions del pla.

Un pla queda determinat per un punt i dos vectors linealment independents paral·lels a ell; aquests vectors reben el nom de vectors direccionals del pla. Si el punt per on passa el pla és $P(x_0, y_0, z_0)$ i els vectors direccionals són $u = (a, b, c)$ i $v = (a', b', c')$, les diferents equacions del pla en l'espai són:

- Equació vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k \cdot (a, b, c) + h \cdot (a', b', c')$
- Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot a + h \cdot a' \\ y = y_0 + k \cdot b + h \cdot b' \\ z = z_0 + k \cdot c + h \cdot c' \end{cases}$$
- Equació general o cartesiana:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

on $w = (A, B, C)$ defineix un vector perpendicular al pla (i per tant als vectors u i v) que anomenem vector característic del pla.

3.3.2. Equacions de la recta.

Una recta queda determinada per un punt i un vector paral·lel a ella; aquest vector rep el nom de vector director de la recta. Si el punt per on passa la recta és $P(x_0, y_0, z_0)$ i el vector director és $u = (a, b, c)$, les diferents equacions de la recta en l'espai són:

- Equació vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k \cdot (a, b, c)$
- Equacions paramètriques:
$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot a \\ y = y_0 + k \cdot b \\ z = z_0 + k \cdot c \end{cases}$$
- Equació en forma continua:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
- Com a intersecció de dos plans:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

3.4. Posicions relatives.

3.4.1. Posició relativa entre dos plans.

Siuguin $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les equacions cartesianes de dos plans. Considerem el sistema format per les dues equacions i, considerem els rangs de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada. Direm que:

1) Els dos plans es tallen segons una recta si el sistema que formen les dues equacions és un S.C.I. amb un grau de llibertat, és a dir, els dos rangs són iguals a 2.

2) Els dos plans són coincidents si el sistema que formen les dues equacions és un S.C.I. amb dos graus de llibertat, és a dir, els dos rangs són iguals a 1.

3) Els dos plans són paral·lels si el sistema que formen les dues equacions és un S.I., és a dir, els dos rangs són diferents.

3.4.2. Posició relativa entre tres plans.

Siguin $Ax+By+Cz+D = 0$, $A'x+B'y+C'z+D' = 0$ i $A''x+B''y+C''z+D'' = 0$ les equacions cartesianes de tres plans. Considerem el sistema format per les tres equacions i, considerem els rangs de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada. Direm que:

1) Els tres plans es tallen en un punt si el sistema que formen les tres equacions és un S.C.D., és a dir, els dos rangs són iguals a 3.

2) Els tres plans es tallen segons una recta si el sistema que formen les tres equacions és un S.C.I. amb un grau de llibertat, és a dir, els dos rangs són iguals a 2.

3) Els tres plans són coincidents si el sistema que formen les tres equacions és un S.C.I. amb dos graus de llibertat, és a dir, els dos rangs són iguals a 1.

4) En el cas que els dos rangs siguin diferents, el S.I. Aquesta situació dona moltes possibilitats que caldrà estudiar-les tenint en compte els plans agafats de dos en dos.

3.4.3. Posició relativa entre recta i pla.

Sigui $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ l'equació de la recta com a intersecció de dos plans, i,

$Ax + By + Cz + D = 0$ l'equació cartesiana del pla. Si considerem el sistema format per les tres equacions lineals, tenim:

1) La recta talla en un punt al pla si el sistema anterior és S.C.D., és a dir, els rangs de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada són iguals a 3.

2) La recta està continguda en el pla si el sistema és S.C.I., és a dir, els dos rangs són iguals a 2.

3) La recta és paral·lela al pla si el sistema és S.I., és a dir, els dos rangs són diferents.

3.4.4. Posició relativa entre dos rectes.

Siguin $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ i $\frac{x-x_1}{a'} = \frac{y-y_1}{b'} = \frac{z-z_1}{c'}$ les equacions en forma continua de les dues rectes. Considerem de totes dues rectes un punt i un vector director, així, obtenim $P(x_0, y_0, z_0)$ i $u = (a, b, c)$ de la primera recta i, $Q(x_1, y_1, z_1)$ i $v = (a', b', c')$ de la segona recta. Considerem el vector $\vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. En aquestes circumstàncies, tenim:

1) Les dues rectes es tallen en un punt si el $\text{rang}(u, v) = \text{rang}(u, v, \vec{PQ}) = 2$.

2) Les dues rectes són coincidents si el $\text{rang}(u, v) = \text{rang}(u, v, \vec{PQ}) = 1$.

3) Les dues rectes són paral·leles no coincidents si el $\text{rang}(u, v) = 1$ i $\text{rang}(u, v, \vec{PQ}) = 2$.

4) Les dues rectes es creuen en l'espai si el $\text{rang}(u, v) = 2$ i $\text{rang}(u, v, \vec{PQ}) = 3$.

3.5. Angles.

3.5.1. Angle determinat per dues rectes.

Dues rectes determinen sempre quatre angles dos a dos iguals. Els dos angles diferents són suplementaris i, se sol considerar com l'angle determinat per les dues rectes el més petit de tots dos.

Si u i v són els vectors directors de les dues rectes, l'angle que determinen les dues rectes és igual a l'angle que determinen els seus vectors directors, així doncs, tenim que l'angle α

ve donat per $\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$. Com α i el seu suplementari $180^\circ - \alpha$ tenen cosinus oposats, per determinar α caldrà prendre el valor absolut de l'expressió anterior.

3.5.2. Angle determinat per dos plans.

Per calcular l'angle que determinen els dos plans s'ha de tenir en compte que aquest és el mateix que l'angle que determinen els seus vectors característics (vectors perpendiculars al

plans). Així doncs, tenim: $\cos \alpha = \frac{w \cdot w'}{|w| \cdot |w'|}$.

3.5.3. Angle determinat per una recta i un pla.

L'angle determinat per una recta i per un pla és complementari a l'angle que forma el vector director de la recta i el vector característic del pla. Així doncs, per calcular aquest angle

farem: $\sin \alpha = \frac{u \cdot w}{|u| \cdot |w|}$, on u és el vector director de la recta i w el vector característic del pla.

3.6. Distàncies.

3.6.1. Distància entre dos punts.

Siguin P i Q dos punts de l'espai. La distància entre P i Q es defineix com $d(P, Q) = \left| \overrightarrow{PQ} \right|$.

3.6.2. Distància entre un punt i un pla.

Si considerem el punt $P(x_0, y_0, z_0)$ i el pla π d'equació cartesiana $Ax + By + Cz + D = 0$, la distància del punt P al pla π està definida com:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3.6.3. Distància entre un punt i una recta.

Si considerem un punt P i una recta r que passa per Q i té vector director u , la distància

entre el punt i la recta ve definida per $d(P, r) = \frac{\left| u \wedge \overrightarrow{PQ} \right|}{|u|}$.

2.6.4. Distància mínima entre dos rectes que es creuen.

Per determinar la distància mínima de dues rectes que es creuen buscarem prèviament l'equació del pla que conté a una d'elles i és paral·lel a l'altra. La distància de qualsevol punt de la recta paral·lela al pla ens dóna la distància desitjada.