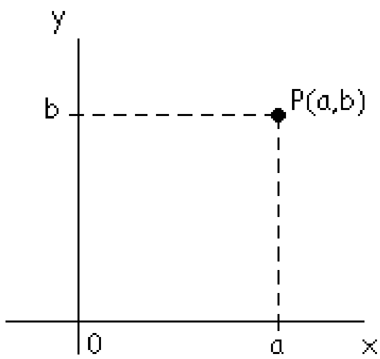
GEOMETRIA ANALÍTICA DEL PLA.

1. **Vectors en el pla.**
2. **Equacions de la recta.**
3. **Posició relativa de dues rectes.**
4. **Paral·lelisme de rectes.**
5. **Producte escalar de dos vectors.**
6. **Perpendicularitat de rectes.**
7. **Distàncies.**

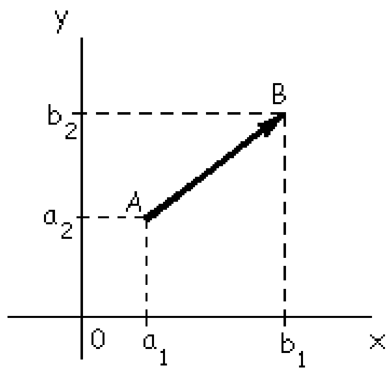
1. Vectors en el pla.

1.1. Vectors.

Designarem per R^2 el conjunt de tots els parells ordenats de nombres reals (a,b), i a cada parell li fem correspondre un únic punt P del pla i, recíprocament. D'aquesta manera podem representar els parells de R^2 en el pla sobre uns eixos cartesians. Als nombres **a** i **b** els anomenem **coordenades** del punt P, essent a l'**abscissa** i b l'**ordenada** del punt.



Siguin A i B dos punts del pla, anomenem **vector fix** d'origen A i extrem B al segment orientat $\vec{AB}$. Això es representa tal com podeu observar en el gràfic adjunt.



Si $A(a_1,a_2)$ i $B(b_1,b_2)$, anomenem **components del vector** $\vec{AB}$ a les projeccions ortogonals del vector sobre cada un dels eixos de coordenades, és a dir, al parell ordenat de nombres reals $(b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$. Així doncs, escriurem:

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$$

Observacions:

1) De la definició es dedueix que $\vec{AB} \neq \vec{BA}$.
2) Si A = B, el vector fix $\vec{AA}$ rep el nom de vector nul; tots els punt de R^2 són vectors nuls.

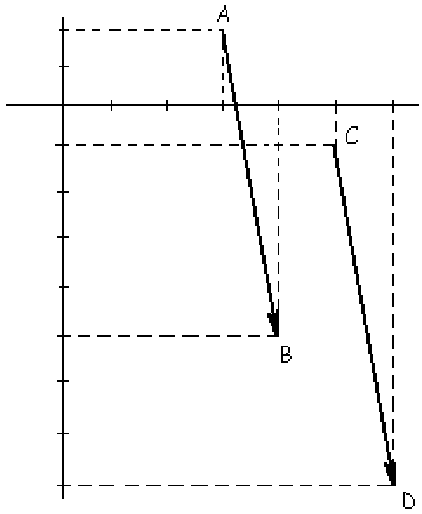
Exemples:

1) *Si A(2,-1) i B(-3,5), les components del vector $\vec{AB}$ són: $\vec{AB}$ = (-5,6).*
2) *Si $\vec{AB}$ = (4,-2) i A(2,3), les coordenades del punt B són: B(6,1).*

Direm que dos vectors fixes $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ són **vectors equipolents** si tenen iguales les seves components.

***Exemple*:**

3) Els punts A(3,2), B(4,-5), C(5,-1) i D(6,-8) defineixen dos vectors $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ equipolents, ja que tots dos tenen les mateixes components, és a dir, (1,-7).



Del gràfic d'aquests vectors podem deduir que els vectors equipolents..

a) són paral·leles (tenen la mateixa direcció).
b) són d'igual longitud (tenen el mateix mòdul).
c) tenen igual sentit.

L'equipolència de vectors ens dóna una classificació dels vectors fixes del pla. Si considerem dins d'una mateixa classe tots els vectors equipolents a un vector fix de components (a,b), obtenim el que anomenem **vector lliure** de components (a,b).

Els vectors lliures se solen indicar amb lletres minúscules amb una fletxa a sobre: $\vec{u}$ i no tenen un origen prefixat.

Per determinar el mòdul d'un vector $\vec{u}$ = (a,b), podem utilitzar el Teorema de Pitàgores després de situar el vector amb origen en l'origen de coordenades. D'aquesta manera obtenim que el mòdul d'$\vec{u}$ és: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

***Exemple*:**

4) El mòdul dels vectors equipolents de l'exemple 3 és:

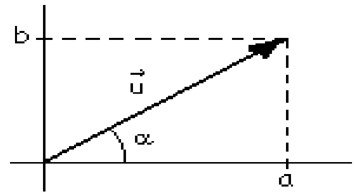
$$|\vec{AB}| = |\vec{CD}| = \sqrt{1^2+(-7)^2} = \sqrt{50} = 5\cdot\sqrt{2}.$$

5) Els vectors que tenen mòdul 1 reben el nom de vectors unitaris. Quin dels següents vectors és unitari? $\vec{u}$ = (1,1), $\vec{v}$ = (1,0) i $\vec{w}$ = (1/2,1/2).

$|\vec{u}| = \sqrt{2}$, *$\vec{u}$ no és unitari;* $|\vec{v}| = 1$, *$\vec{v}$ és unitari;* $|\vec{w}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *$\vec{w}$ no és unitari.*

L'argument d'un vector $\vec{u}$ = (a,b) és l'angle α que forma el vector amb el semieix positiu de l'eix d'abscisses. A partir del gràfic adjunt podem deduir que la tangent de l'angle relaciona les dues components del vector $\vec{u}$. Tenim doncs que:

$$\text{tag } \alpha = \frac{b}{a}, \quad \text{d'on } \alpha = \text{arc tag } \frac{b}{a}.$$



I que, cada una de les components del vector $\vec{u}$ es troba relacionada amb el mòdul i l'argument d'aquest vector. Així doncs, tenim:

$$a = |\vec{u}|\cdot\sin\alpha \quad \text{i} \quad b = |\vec{u}|\cdot\cos\alpha$$

Exemple:

6) *Quin és el mòdul i l'argument del vector* $\vec{u} = (3, \sqrt{3})$*?*

El mòdul és: $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\cdot\sqrt{3}$ *i l'argument és* α *= arc tag* $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *= 30º.*

7) *Quines són les components d'un vector* $\vec{u}$ *de mòdul 5 i d'argument 45º?*

$a = 5\cdot\sin 45^o = 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}.$

$b = 5\cdot\cos 45^o = 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}.$

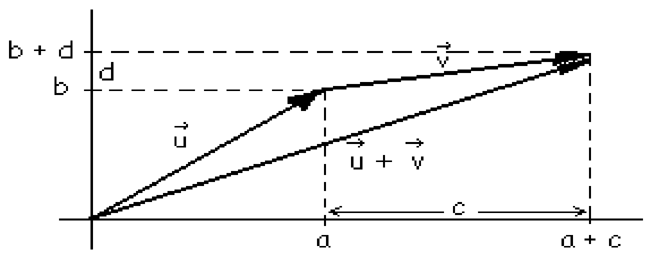
Les components del vector són $\vec{u} = (\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}, \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2})$.

1.2. Operacions amb vectors.

a) Suma de vectors.

Siguin $\vec{u}$ = (a,b) i $\vec{v}$ = (c,d), definim el vector suma de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com un altre vector $\vec{u} + \vec{v}$ de components: $\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$.

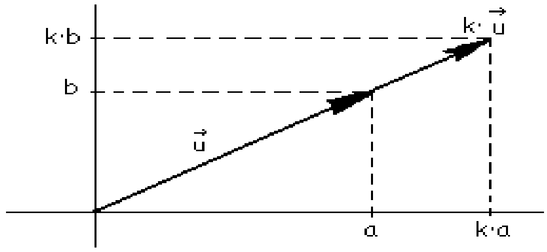
Gràficament seria:



b) Producte d'un vector per un nombre real.

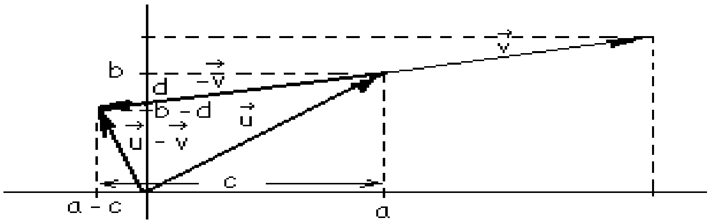
Siguin $\vec{u}$ = (a,b) i k un nombre real, definim el vector producte de $\vec{u}$ i k com un altre vector $k\cdot\vec{u}$ de components: $k\cdot\vec{u} = (k\cdot a, k\cdot b)$.

Gràficament seria:



Podem obtenir el vector $-\vec{u}$ com a producte del vector $\vec{u}$ per –1. Així doncs, tenim que: $-\vec{u} = (-a,-b)$. I el vector resta $\vec{u} - \vec{v}$ com la suma $\vec{u} + (-\vec{v})$, és a dir: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (a + (-c), b + (-d)) = (a - c, b - d)$.

Gràficament seria:



Exemple:

8) *Donats els vectors* $\vec{u} = (3,-2)$ *i* $\vec{v} = (2,5)$, anem a calcular: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ i $2\cdot\vec{u} - 3\cdot\vec{v}$.
$\vec{u} + \vec{v} = (5,3)$, $\vec{u} - \vec{v} = (1,-7)$ i $2\cdot\vec{u} - 3\cdot\vec{v} = (0,-19)$.

1.3. Aplicacions geomètriques dels vectors.

a) Punt mig d'un segment.

Perquè el punt M sigui el punt mig del segment AB cal que $\vec{AM} = \frac{1}{2}\cdot\vec{AB}$. Treballant amb coordenades arribaríem a que: " Si A(a,b) i B(c,d), les coordenades de M, punt mig del segment d'extrems A i B, són $M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ ".

b) Tres punts alineats.

Direm que tres punts A, B i C estan alineats si es verifica que $\vec{BC} = k\cdot\vec{AB}$.

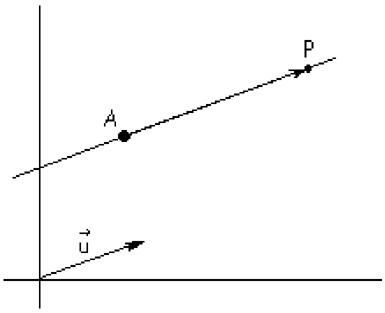
Exemples:

11) *Les coordenades del punt mig del segment definit per A(1,2) i B*(3,-4) són M(2,-1).
12) *Si volem saber si A(2,-2), B(4,1) i C(8,7) estan alineats, només caldrà trobar les components dels vectors* $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$ i comparar-los. Així doncs, tenim: $\vec{AB} = (2,3)$ i $\vec{BC} = (4,6)$.
Com $\vec{BC} = 2\cdot\vec{AB}$, els tres punts estan alineats.

Diem que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos **vectors linealment dependents** (vectors paral·lels) si existeix un nombre real k tal que $\vec{u} = k\cdot\vec{v}$.

2. Equacions de la recta.

L'equació d'una recta pot adoptar diferents formes i, en canvi, designar la mateixa recta.



Per determinar una recta necessitem dos punt, o bé, un punt i un vector paral·lel a ella. El gràfic adjunt ens il·lustra aquesta afirmació.

Si $A(x_0,y_0)$ és el punt per on passa la recta, $P(x,y)$ un punt qualsevol d'aquesta i $\vec{u} = (a,b)$ el vector paral·lel a ella, com $\vec{AP} \parallel \vec{u}$, tenim que $\vec{AP} = k\cdot\vec{u}$, és a dir: $(x - x_0, y - y_0) = k\cdot(a,b)$, d'on $(x,y) = (x_0,y_0) + k\cdot(a,b)$ (equació vectorial de la recta)

Al vector $\vec{u} = (a,b)$ se l'anomena **vector director** de la recta.

De l'equació vectorial de la recta podem deduir fàcilment:

$$\begin{cases} x = x_0 + k\cdot a \\ y = y_0 + k\cdot b \end{cases} \qquad \text{(equacions paramètriques de la recta)}$$

A partir de les equacions paramètriques podem deduir:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \qquad \text{(equació continua de la recta)}$$

A partir de l'equació continua podem passar a la forma cartesiana o general de la recta, simplement fent: $b\cdot(x - x_0) = a\cdot(y - y_0) \rightarrow b\cdot x - a\cdot y + (-b\cdot x_0 + a\cdot y_0) = 0$ i anomenant $A = b$, $B = -a$ i $C = -b\cdot x_0 + a\cdot y_0$, tenim:

$$A\cdot x + B\cdot y + C = 0 \qquad \text{(equació cartesiana o general de la recta)}$$

o bé, podem passar a la forma punt-pendent de la recta fent:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}\cdot(x - x_0) \qquad \text{(equació punt-pendent de la recta)}$$

El quocient $\frac{b}{a}$ és el pendent de la recta i coincideix amb el valor de la tangent de l'angle que forma la recta amb el semieix positiu OX.

Exemples:

13) *Anem a trobar les diferents equacions de la recta que passa pel punt A(2,1) i té com a vector director $\vec{u} = (-1,3)$.*
Equació vectorial: $(x,y) = (2,1) + k\cdot(-1,3)$
Equacions paramètriques: $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 3k \end{cases}$
Equació continua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3}$
Equació general o cartesiana: $3x + y - 7 = 0$
Equació punt-pendent: $y - 1 = -3\cdot(x - 2)$

14) *Trobeu l'equació continua de la recta que passa pels punts A(2,-2) i B(4,1).*
El vector director és $\vec{AB} = (2,3)$, d'aquí que l'equació continua sigui:
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{3}$$

De qualsevol l'equació d'una recta podem arribar fàcilment a l'equació explícita d'aquesta, és a dir: $y = m\cdot x + n$, expressió que coneixem de cursos anteriors. Així, per exemple, si partim de l'equació general o cartesiana $Ax + By + C = 0$ d'una recta, podem aïllar la variable dependent y i tenim:

$$y = -\frac{A}{B}\cdot x - \frac{C}{B}$$

És a dir, $m = -\frac{A}{B}$ (pendent de la recta) i $n = -\frac{C}{B}$ (ordenada en l'origen).

3. Posicions relatives de dues rectes.

Considerem dues rectes expressades en la seva forma cartesiana o general:

$r \equiv Ax + By + C = 0$ i $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$

Les posicions relatives de dues rectes en el pla són:

a) **Les dues rectes es tallen en un punt**, en tal cas, el sistema d'equacions format per les equacions de les dues rectes és compatible i determinat, té una única solució.
b) **Les dues rectes són coincidents**, en tal cas, el sistema d'equacions format per les equacions de les dues rectes és compatible i indeterminat, té infinites solucions.
c) **Les dues rectes són paral·leles**, en tal cas, el sistema d'equacions format per les equacions de les dues rectes és incompatible, no té solució.

Analitzant les tres situacions anteriors podem arribar a determinar en quines condicions es dóna cada cas sense resoldre el sistema, així doncs, tenim:

- Si $AB' = A'B$, les dues rectes es tallen en un punt.
- Si $AB' \neq A'B$, les dues rectes són paral·leles o coincidents. Seran paral·leles si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ (condició de paral·lelisme entre dues rectes) i seran coincidents si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

Exemples:

15) Les rectes d'equacions $4x - 2y + 1 = 0$ i $2x - y + 5 = 0$ són paral·leles, ja que:
$AB' = 4\cdot(-1) = -4 = 2\cdot(-2) = A'B$ i $\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{5}$.

16) Les rectes d'equacions $3x + 2y - 1 = 0$ i $x - y + 5 = 0$ es tallen en un punt, ja que:
$AB' = 3\cdot(-1) = -3 \neq 2 = 1\cdot 2 = A'B$.
Si volem trobar les coordenades del punt de tall d'ambdues rectes només haurem de resoldre el sistema:
$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$. *La solució és (-9/5,11/5).*

4. Paral·lelisme de rectes.

Dues rectes $r \equiv Ax + By + C = 0$ i $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$ són paral·leles si verifiquen la condició: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$. Fent $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1$, tenim que $A = A'$ i $B = B'$, d'on tenim que les equacions d'ambdues rectes es diferencien només pel terme independent.

Si volem determinar l'equació de la recta r' paral·lela a $r \equiv Ax + By + C = 0$ que passa pel punt $P(x_0,y_0)$, tenim que: $r' \equiv Ax + By + C' = 0$, i com ha de passar per $P(x_0,y_0)$, tenim: $Ax_0 + By_0 + C' = 0$, d'on $C' = -Ax_0 - By_0$, i substituint en r', tenim: $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$, o bé, $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

> ***Exemple:***
> *17) L'equació de la recta paral·lela a $3x - y + 7 = 0$ que passa pel punt $P(2,-3)$ és:*
> *$r' \equiv 3x - y + C' = 0$*
> *$3\cdot 2 - (-3) + C' = 0 \rightarrow 9 + C' = 0 \rightarrow C' = -9$, d'on $r' \equiv 3x - y - 9 = 0$.*

5. Producte escalar de dos vectors.

Anomenem producte escalar de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ al nombre real definit per:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

essent α l'angle determinat per aquests vectors.

D'aquesta definició es dedueix:

1) Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2) Si $\vec{u} = \vec{v}$, aleshores $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}| = |\vec{u}|^2$, d'on tenim $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.
3) Si $\vec{u} = \vec{0}$, o bé $\vec{v} = \vec{0}$, aleshores $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
4) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, fórmula que ens permet trobar l'angle que formen dos vectors, o bé, l'angle que formen dues rectes.

> ***Exemple:***
> *19) Els vectors $\vec{u} = (2,1)$ i $\vec{v} = (2,3)$ formen, respectivament, un angle de 26,6º i 56,3º. Per què? Tenim doncs que l'angle determinat pels dos vectors és de 29,7º.*
> *Com $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ i $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, tenim:*
> $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos 29{,}7^\circ \approx 7$.
> *Observeu com aquest resultat també s'obté com: $2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 7$.*

De l'exemple anterior podem deduir fàcilment que si $\vec{u} = (a,b)$ i $\vec{v} = (c,d)$, el producte escalar d'aquests vectors el podem expressar com:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot c + b\cdot d$$

> ***Exemple:***
> *20) Donats els vectors $\vec{u} = (3,-5)$ i $\vec{v} = (2,3)$ anem a calcular el producte escalar i els mòduls d'aquests vectors, així com l'angle que formen.*
> $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 2 + (-5)\cdot 1 = 1$
> $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$ *i* $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, *tenim:*
> *$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{13}} = 0{,}047565149 \rightarrow \alpha = 87{,}27^\circ$.*

6. Perpendicularitat de rectes.

Dues rectes són perpendiculars si els seus vectors directors són ortogonals, així doncs, tenim que $r \equiv Ax + By + C = 0$ i $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$ són dues rectes perpendiculars si els seus vectors directors $\vec{u} = (-A,B)$ i $\vec{v} = (-A',B')$ són ortogonals, és a dir,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = A \cdot A' + B \cdot B' = 0$$

(condició de perpendicularitat entre dues rectes).

> ***Exemples:***
> *21) Les rectes $3x - 2y + 5 = 0$ i $4x + 6y - 7 = 0$ són perpendiculars, ja que:*
> *$A \cdot A' + B \cdot B' = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$.*
> *22) Les rectes $2x + 3y - 1 = 0$ i $4x + 6y + 2 = 0$ no són perpendiculars, ja que:*
> *$A \cdot A' + B \cdot B' = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26 \neq 0$. Ara bé, són paral·leles. Per què?*

Per determinar la recta $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$ perpendicular a $r \equiv Ax + By + C = 0$ que passa per un punt $P(x_0,y_0)$, hem de tenir en compte la condició de perpendicularitat:

$$A \cdot A' + B \cdot B' = 0 \rightarrow A \cdot A' = -B \cdot B' \rightarrow \frac{A'}{-B} = \frac{B'}{A} = k \rightarrow A' = -k \cdot B \text{ i } B' = k \cdot A$$

Si fem $k = 1$, tenim: $A' = -B$ i $B' = A$, d'on la recta r' perpendicular a r que passa per P pren la forma $-Bx + Ay + C' = 0$, on $C' = B \cdot x_0 - A \cdot y_0$.

> ***Exemple:***
> *23) L'equació de la recta perpendicular a $3x - 2y + 5 = 0$ que passa pel punt $P(3,-1)$ és de la forma: $2x + 3y + C' = 0$. Com passa per P, tenim:*
> *$2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + C' = 0 \rightarrow C' = -3$. L'equació de la recta perpendicular és doncs:*
> *$2x + 3y - 3 = 0$.*

7. Distàncies.

7.1. Distància entre dos punts.

Anomenem distància entre dos punts A i B al mòdul del vector $\vec{AB}$, és a dir, $d(A.B) = |\vec{AB}|$.

Si $A(a_1,a_2)$ i $B(b_1,b_2)$, la distància entre els punts A i B, ve donada per la fórmula:

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a\ )^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Propietats:

1) $d(A,B) \geq 0$ (La igualtat només es dóna quan $A = B$).
2) $d(A,B) = d(B,A)$.
3) Desigualtat triangular: $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$ (La igualtat només es dóna quan A, B i C estan alineats).

Exemples:

24) Anem a comprovar que els punts A(1,2), B(0,-1) i C(2,5) estan alineats.

d(A,B) = $\sqrt{(0-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$; *d(A,C) =* $\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$ i

d(C,B) = $\sqrt{(2-0)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Com d(C,B) = d(A,B) + d(A,C), tenim que els tres punts estan alineats.

25) Els tres punts A(0,0), B(1,1) i C(-1,2) no estan alineats i per tant formen triangle. Comprovem-ho:

d(A,B) = $\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$; *d(A,C) =* $\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$ i

d(C,B) = $\sqrt{(1-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

Com d(A,C) < d(A,B) + d(C,B), els punts no estan alineats i formen un triangle isòsceles, ja que aquest triangle té dos costats iguals i un desigual.

7.2. Distància d'un punt a una recta.

Donada la recta r ≡ Ax + By + C = 0 i el punt P(x_0,y_0), la distància del punt P a la recta r ve donada per la fórmula:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Exemple:

26) La distància del punt P(3,2) a la recta 3x – 4y + 1 = 0 és: d(P,r) = $\frac{|3\cdot3+(-4)\cdot2+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{2}{5}$.

EXERCICIS DE REFORÇ

1. Donats els punts A(2,3), B(-1,5) i C(3,1), es demana:
   a) Les components del vector $\vec{AB}$.
   b) Si A, B i C són tres dels vèrtexs d'un paral·lelogram ABCD, dibuixeu el paral·lelogram i determineu les coordenades del vèrtex D.

2. a) Quin és el mòdul i l'argument del vector $\vec{u}$ = (-2,3)?
   b) Quines són les components d'un vector $\vec{u}$ de mòdul 2 i d'argument 210º?

3. Donats els vectors $\vec{u}$ = (-1,1), $\vec{v}$ = (3,1) i $\vec{w}$ = (-2,-3), es demana:
   a) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$.
   b) $2\cdot\vec{u}-3\cdot\vec{v}+\vec{w}$.

4. Trobeu el valor de m per tal que els punts A(-3,5), B(2,2) i C(4,m) estiguin alineats.

5. El punt M(-1,2) és el punt mig del segment definit pels punts A i B. Si les coordenades de B són B(2,5), quines són les coordenades d'A?

6. Determineu les coordenades dels dos punts P i Q que divideixen el segment definit per A(4,1) i B(-2,4) en tres parts iguals.

7. Doneu totes les equacions de la recta que passa pels punts P(3,-1) i Q(5,2).

8. Determineu l'equació de la recta que passa pel punt P(2,-1) i forma un angle de 60° amb el semieix OX .

9. Quina és l'equació general o cartesiana de la recta que passa per l'origen de coordenades i pel punt de tall de les rectes $x + y - 1 = 0$ i $x - y + 3 = 0$?

10. Trobeu el valor de m per tal que les rectes $r \equiv mx - 3y - 6 = 0$ i $r' \equiv 7x - y - 8 = 0$ siguin paral·leles. Per quin o quins valors de m les rectes r i r' es tallen en un punt?. Justifiqueu-vos.

11. Determineu les equacions de la recta paral·lela i perpendicular a $r \equiv 5x - 3y + 1 =$ que passen pel punt P(-2,7).

12. Trobeu les equacions de les medianes i de les altures del triangle ABC essent A(-4,2), B(1,7) i C(5,-2). Quines són les coordenades del baricentre? I del ortocentre?

13. Donats els vectors $\vec{u} = (3,4)$ i $\vec{v} = (-3,1)$, es demana:
    a) l'angle que determinen aquests vectors.
    b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ i de mòdul 1.

14. Donats els punts P(2,1) i Q(1.-3) i la recta $r \equiv 4x - 8y + 7 = 0$, es demana:
    a) la distància d(P,Q).
    b) Les distàncies d(P,r) i d(Q,r).

15. a) Comproveu que els punts A(1,2), B(-2,3) i C(0,1) determinen un triangle. És rectangle?
    b) Quina és l'àrea del triangle ABC.