

POLINOMIS I FUNCIONS POLINÒMIQUES.

1. Els polinomis.
2. Operacions amb polinomis: La suma, la resta i el producte de polinomis.
3. Identitats notables. El binomi de Newton.
4. Divisió de polinomis. Regla de Ruffini.
5. Descomposició factorial de polinomis.
6. Les fraccions algèbriques.
7. Funcions polinòmiques.
8. Funcions racionals.

1. Els polinomis.

Una expressió com $p(x) = 7x^2 + 3x - 5$, que només conté potències de x amb exponents naturals, s'anomena **polinomi d'una indeterminada x amb coeficients reals**. Com la potència més gran de x és x^2 , diem que el polinomi és de grau 2.

Cada terme (o sumand) està format pel producte d'un nombre real (**coeficient**) i una potència de x (**part literal**) i s'anomena **monomi**. El grau d'un monomi és l'exponent de la part literal (Exemple: 5 és de grau 0 i $3x^7$ de grau 7). Un **binomi** és un polinomi amb dos sumands i un **trinomi** amb tres. En general, els polinomis s'escriuen ordenats segons els graus dels monomis, és a dir, de més gran a més petit, o bé, de més petit a més gran.

Exemples:

- 1) L'expressió algèbrica $2x^7 - 5x^2 + x - 1$ és un polinomi de grau 7. El coeficient del monomi de grau màxim és 2.
- 2) Els polinomis $3x^2 - 1$ i $2 - 3x$ són binomis de grau 2 i 1 respectivament

Al substituir x per un nombre x_0 s'obté el **valor numèric del polinomi per a $x = x_0$** . Si el valor numèric és 0 quan x pren el valor x_0 , diem que x_0 és un **zero o una arrel del polinomi**.

Exemples:

- 3) El valor numèric de $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ per a $x_0 = -1$ és: $p(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 1 = -10$.
- 4) El valor $x_0 = 2$ és un zero o arrel del polinomi $p(x) = x^2 - 5x + 6$, ja que $p(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$.

2. Operacions amb polinomis: la suma, la resta i el producte de polinomis.

2.1. La suma i la resta de polinomis.

La suma de polinomis es redueix a una suma o a una resta de nombres. N'hi ha prou en agrupar els termes semblants (termes amb la mateixa part literal) i sumar o restar els seus coeficients.

Exemple:

- 5) Si volem sumar els polinomis $p(x) = 5x^2 + 3x - 7$ i $q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, farem:
 $p(x) + q(x) = (5x^2 + 3x - 7) + (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) = x^3 + (5x^2 - 2x^2) + (3x + 5x) + (-7 + 1) = x^3 + 3x^2 + 8x - 6$.
 I per la resta, farem:
 $p(x) - q(x) = (5x^2 + 3x - 7) - (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) = -x^3 + (5x^2 + 2x^2) + (3x - 5x) + (-7 - 1) = -x^3 + 7x^2 - 2x - 8$.

2.2. El producte de polinomis.

- Per multiplicar dos monomis n'hi ha prou en multiplicar els coeficients i les parts literals, utilitzant en aquest darrer cas, la propietat del producte de potències d'igual base.
- Si tenim en compte l'apartat anterior, el producte de polinomis és pràcticament igual, només cal tenir en compte la propietat distributiva del producte respecte de la suma.

Exemple:

6) Si volem multiplicar els monomis $p(x) = 5x^3$ i $q(x) = -2x^2$, farem:

$$p(x) \cdot q(x) = (5x^3) \cdot (-2x^2) = -10x^5.$$

7) Si volem multiplicar els polinomis $p(x) = 5x^2 + 3x - 7$ i $q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, farem:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (5x^2 + 3x - 7) \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) = \\ &= (5x^5 - 10x^4 + 25x^3 + 5x^2) + (3x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x) + (-7x^3 + 14x^2 - 35x - 7) = \\ &= 5x^5 + (-10x^4 + 3x^4) + (25x^3 - 6x^3 - 7x^3) + (5x^2 + 15x^2 + 14x^2) + (3x - 35x) - 7 = \\ &= 5x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 32x - 7. \end{aligned}$$

Una altra forma de fer-ho és:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \\ \quad 5x^2 + 3x - 7 \\ \hline -7x^3 + 14x^2 - 35x - 7 \\ \quad 3x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x \\ \hline 5x^5 - 10x^4 + 25x^3 + 5x^2 \\ \hline 5x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 32x - 7 \end{array}$$

2.3. El producte d'un polinomi per un nombre real.

Per multiplicar un polinomi $p(x)$ per un nombre real k , n'hi ha prou en multiplicar tots els coeficients d'aquest polinomi per k .

Exemple:

8) Si el polinomi és $p(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 7$ i el volem multiplicar per -3 , escriurem:

$$-3 \cdot p(x) = -3 \cdot (3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 7) = -9x^4 - 3x^3 + 15x^2 - 3x + 21.$$

9) Donats $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ i $q(x) = -2x^2 + 5x - 2$, el polinomi $2 \cdot p(x) - 3 \cdot q(x)$ és:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p(x) - 3 \cdot q(x) &= 2 \cdot (x^3 + 2x^2 - x + 5) - 3 \cdot (-2x^2 + 5x - 2) = \\ &= 2x^3 + 4x^2 - 2x + 10 + 6x^2 - 15x + 6 = 2x^3 + 10x^2 - 17x + 16. \end{aligned}$$

3. Identitats notables. El binomi de Newton.

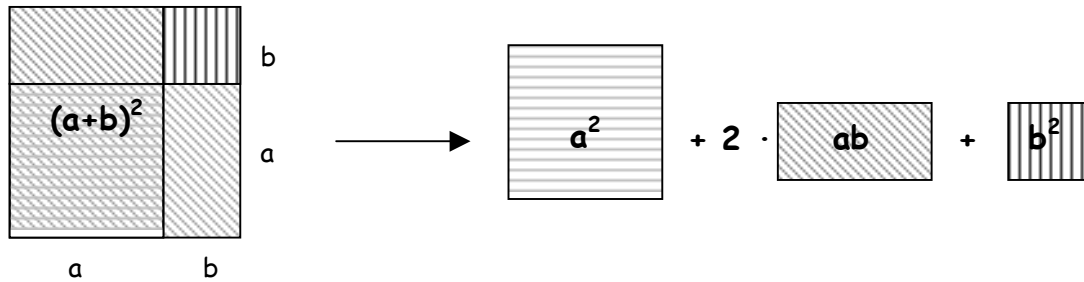
Les identitats notables són:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{i} \quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2,$$

totes elles es poden demostrar amb recursos geomètrics.

Anem a demostrar geomètricament que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

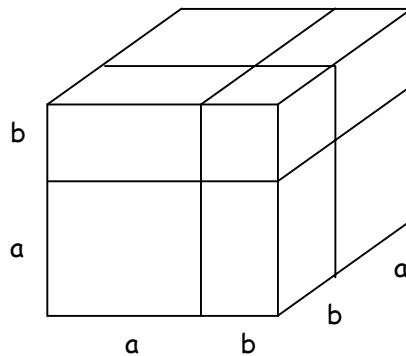
Considerem un quadrat de costat $a+b$. La seva àrea és $(a + b)^2$. Si descomponem el quadrat en quatre peces tal com s'observa en el dibuix adjunt, observareu que l'àrea del quadrat inicial també es pot escriure com a suma de les àrees de cadascuna de les peces que el componen, així doncs, tenim: $a^2 + 2ab + b^2$, d'aquí que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Intenteu demostrar les altres dues identitats notables utilitzant també recursos geomètrics.

Per determinar l'expressió de $(a+b)^3$, podem fer-ho també geomètricament. Utilitzeu la vostra imaginació i veureu com a partir d'aquesta figura podreu deduir que el desenvolupament és:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Ara bé, en potències del tipus $(a+b)^n$, on n és un nombre natural, és més convenient utilitzar mètodes algebriques. Així per exemple:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = \dots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a+b) = \dots = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

I així successivament.

Aquest mètode no és gens pràctic per a exponents grans, ja que requereix conèixer el desenvolupament de la potència anterior. Hem de buscar altres alternatives que ens permetin determinar, per exemple, el desenvolupament de $(a+b)^7$ sense conèixer necessàriament el desenvolupament de $(a+b)^6$.

Activitat:

Observeu el triangle numèric següent:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

.....

- Com creieu que s'obté cada número d'aquest triangle?
- Observeu els números que componen la tercera línia i compareu-los amb els coeficients del desenvolupament de $(a+b)^2$. Què observeu?
- Quina fila d'aquest triangle té els coeficients del desenvolupament de $(a+b)^3$?
- Doneu el desenvolupament de $(a+b)^7$ i de $(a+b)^{10}$.

Com molt bé haureu deduït, aquest triangle ens resol el problema de calcular el desenvolupament de les potències de binomis, és a dir, les potències del tipus $(a + b)^n$. Aquest triangle és conegut com a **Triangle de Tartàglia** i a la igualtat obtinguda en el desenvolupament de la potència $(a + b)^n$ se la coneix com a **Binomi de Newton**.

4. Divisió de polinomis. Regla de Ruffini.

Si volem dividir un polinomi $a(x)$ per un altre $b(x)$, existeixen sempre dos polinomis $q(x)$ (quocient) i $r(x)$ (residu) tal que $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$, on el grau de $r(x)$ sempre és més petit que el grau de $b(x)$.

A continuació donarem un mètode per determinar el quocient i el residu de la divisió de dos polinomis. Si volem dividir el polinomi $a(x)$ per $b(x)$, el procediment a seguir, seria:

- 1) Trobar un monomi que multiplicat pel terme de grau màxim de $b(x)$ ens doni el terme de major grau de $a(x)$.
- 2) Amb el polinomi $k(x)$ que s'obté de restar a $a(x)$ el producte del monomi i $b(x)$, es tornarà a fer el mateix, sempre que el grau de $k(x)$ sigui més gran o iguala $b(x)$, en cas contrari, hem acabat la divisió.

Exemple:

10) Per dividir el polinomi $a(x) = 5x^6 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 1$ per $b(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, farem:

$$\begin{array}{r}
 5x^6 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 1 \quad | \quad x^3 - x^2 + x + 1 \\
 \underline{- 5x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 5x^3} \quad 5x^3 + 5x^2 + 3x - 6 \\
 5x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 \\
 \underline{- 5x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 5x^2} \quad 3x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 1 \\
 3x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 1 \\
 \underline{- 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x} \quad - 6x^3 - 5x^2 - 3x - 1 \\
 - 6x^3 - 5x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{6x^3 - 6x^2 + 6x + 6} \quad -11x^2 + 3x + 5 \\
 -11x^2 + 3x + 5
 \end{array}$$

El quocient d'aquesta divisió és $q(x) = 5x^3 + 5x^2 + 3x - 6$ i el residu $r(x) = -11x^2 + 3x + 5$.

Podem comprovar fàcilment que es verifica: $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$.

En el cas particular que el divisor sigui del tipus $(x - a)$, el càlcul del quocient i el residu de la divisió es pot fer de forma més simple si utilitzem la **Regla de Ruffini**.

Imagineu-vos que volem calcular el quocient i el residu de la divisió:

$$(5x^3 - 4x^2 + 5x - 1) : (x - 2).$$

Si fem servir el mètode anterior, tenim:

$$\begin{array}{r}
 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{- 5x^3 + 10x^2} \quad 5x^2 + 6x + 17 \\
 6x^2 + 5x - 1 \\
 \underline{- 6x^2 + 12x} \quad 17x - 1 \\
 17x - 1 \\
 \underline{- 17x + 34} \quad 33 \\
 33
 \end{array}$$

Observeu com els coeficients del divisor i el residu es poden obtenir de manera més simple fent:

	5	-4	5	-1
2		10	12	34
	5	6	17	33

*Els nombres de la primera fila són els coeficients del dividend, els de la tercera la suma de les dues anteriors.

*Cada nombre de la segona fila és el producte del terme anterior de la tercera fila per 2 (recorda que el divisor és $x - 2$) excepte el primer, que és zero.

Observació: Recorda de posar un zero per a cada terme de coeficient nul del polinomi dividend.

TEOREMA DEL RESIDU:

"El residu de la divisió d'un polinomi $p(x)$ per $(x - a)$ coincideix amb el valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$, és a dir, $p(x) = q(x) \cdot (x - a) + p(a)$ ".

La seva demostració és molt senzilla, ja que al dividir $p(x)$ per $(x - a)$ trobarem els polinomis $q(x)$ i r , quocient i residu de la divisió, de tal forma que:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r.$$

Si calculem el valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$, obtenim:

$$p(a) = q(a) \cdot (a - a) + r, \text{ d'on es dedueix que } p(a) = r.$$

Recorda que si el residu és 0, el polinomi $p(x)$ és divisible per $(x - a)$.

5. Descomposició factorial d'un polinomi.

Diem que un polinomi $p(x)$ és **múltiple** d'un altre polinomi $q(x)$, o bé, que $q(x)$ és **divisor** de $p(x)$, quan existeix un altre polinomi $k(x)$ tal que $p(x) = q(x) \cdot k(x)$.

Exemples:

11) El polinomi $p(x) = x^2 - 3x$ és múltiple de $q(x) = x$, ja que $p(x)$ es pot escriure com a producte de $q(x)$ i $k(x) = x - 3$. En tal cas també diem que $q(x)$ és divisor de $p(x)$.

12) El polinomi $p(x) = x^2 - 5x + 6$ és múltiple de $q(x) = x - 2$, ja que es possible trobar un altre polinomi $k(x) = x - 3$ tal que el producte de $q(x)$ i $k(x)$ sigui $p(x)$.

Un polinomi $p(x)$ de grau més gran o igual a 1 es diu que és **irreductible** si no es pot descompondre com a producte de dos polinomis.

Exemples:

13) El polinomi $p(x) = x^2 - 3x + 2$ no és irreductible, ja que es pot escriure com a producte de $x - 2$ i $x - 1$.

14) Tots els polinomis de grau 1 són irreductibles.

15) El polinomi $p(x) = x^2 + 1$ és irreductible, ja que no es possible trobar dos polinomis de grau 1 tal que el seu producte sigui $p(x)$.

TEOREMA DE FACTORITZACIÓ:

"Tot polinomi de grau més gran o igual a 1 es pot descompondre en producte de polinomis irreductibles".

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ són zeros o arrels de $p(x)$, la descomposició factorial del polinomi és:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

i si el grau de $q(x)$ és n , aleshores $q(x)$ és una constant a , i la descomposició seria:

$$p(x) = a \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

Exemples:

16) Per descompondre el polinomi $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$, hem de trobar totes les arrels del polinomi i farem ús de la regla de Ruffini. Les arrels enteres es troben sempre entre tots els divisors del terme independent, és a dir: -10.

Els divisors de -10 són: 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10 i -10.

Si anem provant entre aquests nombres, ens surten com a arrels -2 i 5, ja que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -23 & -10 \\ -2 & & -4 & 18 & 10 \\ \hline & 2 & -9 & -5 & 0 \\ 5 & & 10 & 5 & \\ \hline & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

d'on és té: $p(x) = (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (2x + 1)$, o bé, $2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x + \frac{1}{2})$.

17) La descomposició factorial de $p(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ és: $p(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$, ja que 1, -2 i 5 són arrels del polinomi i el grau és 3.

MOLT IMPORTANT: "El nombre d'arrels reals d'un polinomi és sempre més petit o igual que el grau d'aquest polinomi".

6. Les fraccions algèbriques.

En molts problemes apareixen sovint fraccions en les quals el numerador o el denominador o tots dos alhora són polinomis. Aquestes fraccions les coneixem amb el nom de **fraccions algèbriques**.

Exemple:

18) L'expressió $\frac{3x^2 - 2x + 5}{x^3 - 2x^2 - 7x + 1}$ és una fracció algèbrica.

19) Les fraccions algèbriques $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ i $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ són equivalents, ja que es verifica: $(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 4)$.

Algunes propietats de les fraccions algèbriques són:

- 1) Tota fracció algèbrica es equivalent a la que resulta de multiplicar numerador i denominador per un mateix polinomi.
- 2) Tota fracció algèbrica és equivalent a la que resulta de dividir numerador i denominador per un mateix polinomi.

El procediment emprat en trobar la fracció equivalent resultant de dividir numerador i denominador per un mateix polinomi s'anomena **simplificació**.

Exemples:

20) En la fracció algebraica $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$ podem dividir numerador i denominador per $x+2$ obtenint com a fracció equivalent $\frac{x-2}{x+2}$.

21) Si volem simplificar la fracció algebraica $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$, podem descompondre factorialment els dos polinomis i després simplificar els factors comuns. Així doncs, aplicant la regla de Ruffini, la descomposició factorial del numerador i del denominador és: $x^2 + x - 6 = (x-2) \cdot (x+3)$ i $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2) \cdot (x^2 + 4)$,
d'on tenim: $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{(x-2) \cdot (x+3)}{(x-2) \cdot (x^2 + 4)} = \frac{x+3}{x^2 + 4}$

Recorda que per reduir a comú denominador dues fraccions aritmètiques, buscàvem el m.c.m. del numerador i del denominador que seria el denominador comú més petit. Ara bé, després calia buscar els nous numeradors per tal que les noves fraccions fossin equivalents a les primeres. Així per exemple, tenim que les fraccions equivalents a $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}$ amb el més petit denominador comú són $\frac{9}{24}$ i $\frac{10}{24}$, ja que m.c.m.(8,12) = 24. De forma equivalent actuarem per reduir dues fraccions algebraiques a comú denominador.

Exemple:

22) Les fraccions equivalents a $\frac{3x-4}{x^2+5x+6}$ i $\frac{5x-2}{x^2+3x+2}$ amb el més petit denominador comú serien: $\frac{(3x-4) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1)}$ i $\frac{(5x-2) \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1)}$, és a dir $\frac{3x^2 - x - 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$ i $\frac{5x^2 + 13x - 6}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$, ja que $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$ i $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ i el mínim comú múltiple d'aquests dos polinomis és: $(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+1) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Operacions amb fraccions algebraiques.

1) Suma i resta de fraccions.

Per sumar o restar dues fraccions algebraiques cal reduir al més petit comú denominador aquestes fraccions per després sumar els numeradors i posar com a denominador el denominador comú. Caldrà simplificar el resultat, sempre que es pugui.

Exemple:

23) $\frac{x-5}{x^2-2x+1} + \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x-5}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{(x-5) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)^2} + \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)^2} =$
 $= \frac{(x^2 - 4x - 5) + (x^2 + x - 2)}{(x+1) \cdot (x-1)^2} = \frac{2x^2 - 3x - 7}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

2) Producte de fraccions.

Per multiplicar dues fraccions algèbriques farem el producte dels numeradors i el dividirem pel producte dels denominadors. Caldrà simplificar el resultat, sempre que es pugui.

Exemple:

$$24) \frac{x-2}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{(x^2-2x+1) \cdot (x^2-4)} = \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{1}{x^2+x-2}.$$

3) Divisió de fraccions.

Per dividir dues fraccions algèbriques farem el producte del numerador de la primera fracció amb el denominador de la segona i aquest el dividirem pel producte del numerador de la segona fracció amb el denominador de la primera. Caldrà simplificar el resultat, sempre que es pugui.

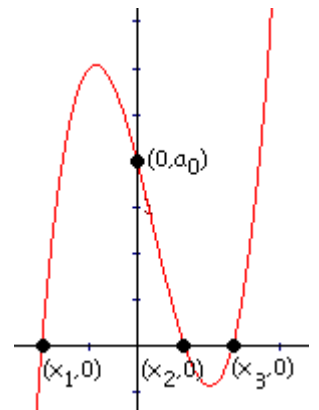
Exemple:

$$25) \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} : \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x^2-1) \cdot (x-2)}{(x^2-4x+4) \cdot (x-1)} = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(x-2)^2 \cdot (x-1)} = \frac{x+1}{x-2}.$$

7. Funcions polinòmiques.

Les funcions que tenen com a expressió un polinomi reben el nom de **funcions polinòmiques**, és a dir: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Les arrels d'una funció polinòmica són les arrels del polinomi associat i coincideixen amb els **punts de tall de la funció amb l'eix d'abscisses**. La imatge de 0, $f(0)$, ens dona el terme independent del polinomi associat a la funció i, també, el **punt de tall de la funció amb l'eix d'ordenades**.



7.1. Característiques d'una funció polinòmica.

- 1) Totes les funcions polinòmiques tenen domini $\mathbb{R}$.
- 2) Totes les funcions polinòmiques són contínues.
- 3) El valor numèric del polinomi associat a una funció polinòmica per a valors x_0 molt grans o molt petits són molt semblants al valor numèric del seu monomi de grau màxim.

Les funcions polinòmiques, a més de ser sempre contínues, poden ser creixents o decreixents a intervals, tenir màxims i/o mínims relatius, ser còncaves o convexes a intervals, tenir punts d'inflexió, etc.

Algunes d'aquestes funcions presenten en el seu gràfic una simetria respecte de l'eix d'ordenades, o bé, de l'origen de coordenades. Així, tenim que:

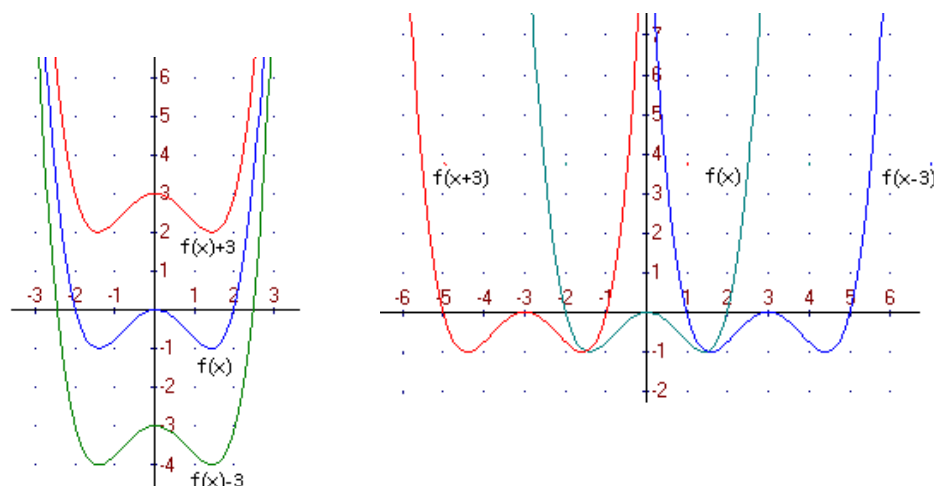
La funció $f(x)$ és una **funció parell**, és a dir, és una **funció simètrica respecte de l'eix d'ordenades** si verifica: $f(-x) = f(x)$.

I, direm que la funció $f(x)$ és una **funció imparell**, és a dir, és una **funció simètrica respecte de l'origen de coordenades** si verifica: $f(-x) = -f(x)$.

7.2. Transformacions de les funcions polinòmiques.

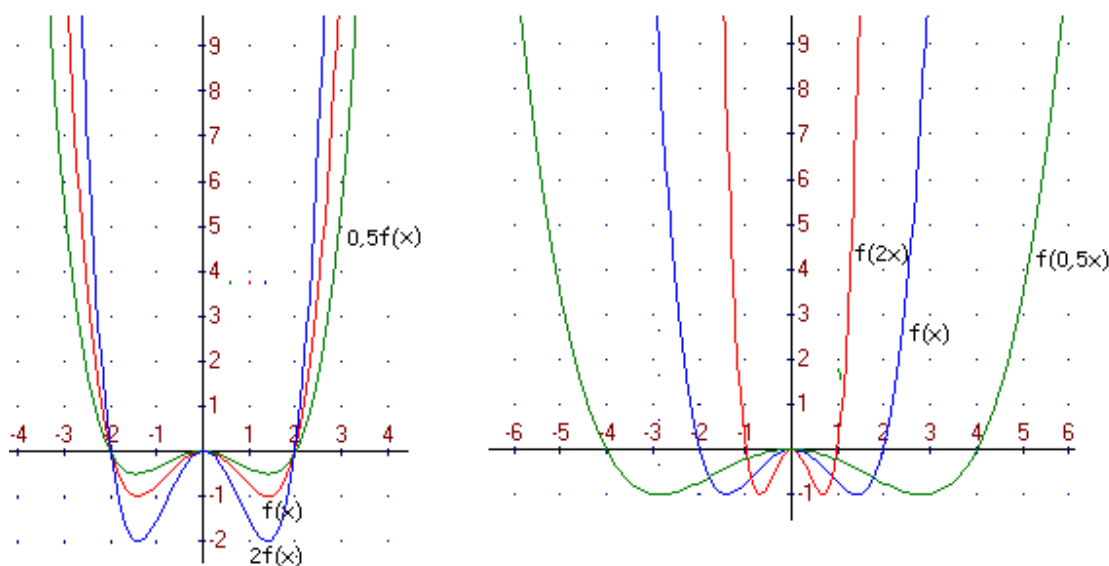
Donada una funció $f(x)$, el gràfic de la funció $g(x) = f(x)+k$ és una **translació vertical de k unitats** del gràfic de la funció $f(x)$ cap a la part superior de l'eix d'ordenades si $k > 0$, o bé, cap a la part inferior de l'eix d'ordenades si $k < 0$.

El gràfic de la funció $g(x) = f(x+k)$ és una **translació horitzontal de k unitats** del gràfic de la funció $f(x)$ cap a la part esquerra de l'eix d'abscisses si $k > 0$, o bé, cap a la part dreta de l'eix d'abscisses si $k < 0$.



Donada la funció $f(x)$, el gràfic de la funció $g(x) = k \cdot f(x)$ és una **dilatació vertical** del gràfic de $f(x)$, si $k > 1$, i és una **contracció vertical**, si $0 < k < 1$.

El gràfic de la funció $g(x) = f(k \cdot x)$ és una **dilatació horitzontal** del gràfic de $f(x)$, si $0 < k < 1$, i és una **contracció horitzontal**, si $k > 1$.



8. Funcions racionals.

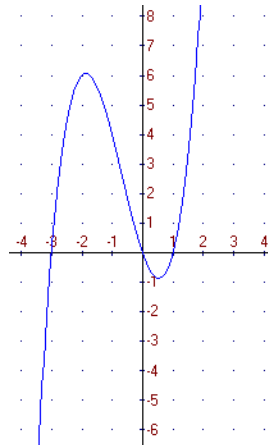
Les funcions que tenen com a expressió una fracció algebàrica reben el nom de **funcions racionals**.

Ja coneixeu algunes funcions racionals, com per exemple $f(x) = \frac{3}{x}$, o bé $f(x) = \frac{x+1}{x}$. En aquest apartat, resolent els exercicis que us proposem, veurem algunes més i treballarem les característiques a partir del gràfic. Més endavant es farà a partir de la seva expressió.

EXERCICIS DE REFORÇ

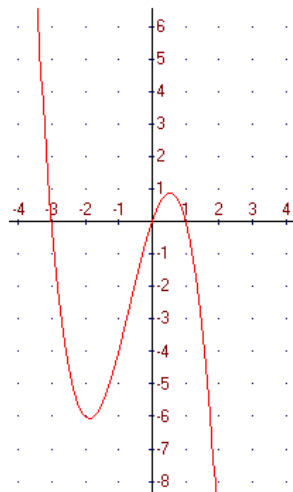
1. Trobeu un polinomi $p(x)$ tal que sumat al polinomi $q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ ens doni el polinomi $r(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 5$.
2. Donats els polinomis $p(x) = x^3 - 2$, $q(x) = x^2 - 5x + 2$ i $r(x) = 2x^5 - x^3 + x + 1$, determineu:
 - a) $[2p(x) - 3q(x)] \cdot r(x)$.
 - b) El quocient i el residu de la divisió $r(x):q(x)$.
 - c) El valor numèric d'aquests polinomis per a $x = -1$. És $x = -1$ arrel d'algun d'aquests polinomis?. Per què?.
3. Determineu el valor de m per tal que el residu de la divisió $(x^4 - 5x^3 + mx - 6) : (x + 3)$ sigui 0.
4.
 - a) Doneu la descomposició factorial dels polinomis:
 $p(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ i $q(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$.
 - b) Determineu el mcm i el mcd de $p(x)$ i $q(x)$.
5. Desenvolpeu el binomi $(2x^2 - 1)^5$.
6. Efectueu les següents operacions amb fraccions algebriques:
 - a) $\frac{3x+2}{x+1} + \frac{x+2}{x^2-1}$.
 - b) $\frac{x^3+x^2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{2x^3+x^2}$.
 - c) $\frac{x+5}{x+1} : \frac{x^2-25}{x^2-1}$.
7. Donades les funcions polinòmiques $f(x) = x^2 - 5x + 6$ i $g(x) = -3x + 9$, es demana:
 - a) Les coordenades dels punts de tall d'aquestes funcions als eixos de coordenades.
 - b) Les coordenades dels punts comuns als gràfics de les dues funcions.
 - c) La representació gràfica de les dues funcions en els mateixos eixos de coordenades.

8. Donada la funció $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$. Es demana:
- Quines són les arrels d'aquesta funció?. Quines són les coordenades dels punts de tall amb els eixos de coordenades?.
 - Representeu gràficament aquesta funció i doneu propietats característiques observables a partir del gràfic.
9. A partir del gràfic de la funció $f(x) = x^2$, feu els gràfics de les funcions:
 $g(x) = (x - 3)^2$ i $h(x) = x^2 - 3$.
10. El gràfic de la funció $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ és:

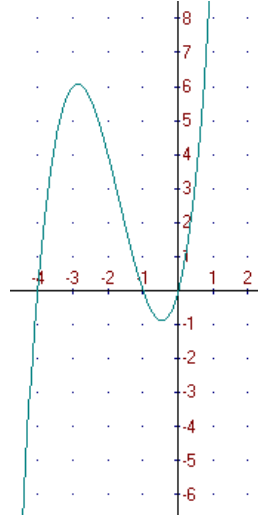


Observeu els gràfics següents i indiqueu quina transformació ha sofert la funció $f(x)$ en cada un dels casos.

a)



b)



c)

