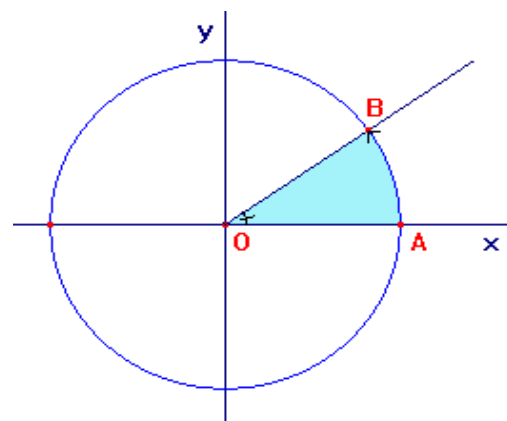


TRIGONOMETRIA. FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES.

1. Angles i mesura d'angles.
2. Raons trigonomètriques d'un angle agut.
3. Resolució de triangles rectangles.
4. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol.
5. Reducció d'un angle qualsevol a un del primer quadrant.
6. Funcions trigonomètriques.

1. Angles i mesura d'angles.

Considerem uns eixos de coordenades i amb centre en l'origen O tracem una circumferència de radi 1. Per representar i mesurar angles col·locarem el vèrtex de l'angle en l'origen de coordenades i el costat origen en l'eix d'ordenades. L'angle serà positiu si al dibuixar el segon costat de l'angle ens desplaçem sobre la circumferència en sentit contrari a d'avançament de les agulles del rellotge, i serà negatiu en cas contrari.



Angle positiu de vèrtex O , de costat origen OA i de costat extrem OB

Per mesurar l'amplitud d'un angle utilitzarem, bàsicament, dues unitats de mesura: el **grau sexagesimal** i el **radià**.

Si dividim una volta de circumferència en 360 parts iguals, cada una d'aquestes divisions rep el nom de **grau sexagesimal**. Si cada grau el dividim en 60 parts iguals, obtenim el **minut sexagesimal**. I si cada minut el dividim en 60 part, també iguals, tenim el **segon sexagesimal**.

Per indicar un angle d'amplitud 23 graus, 15 minuts i 47 segons sexagesimals ho farem amb la notació següent: $23^\circ 15' 47''$.

Cal recordar que: $1^\circ = 60'$ i $1' = 60''$.

Exemples:

- 1) Quants graus, minuts i segons sexagesimals té un angle d'amplitud $23,48^\circ$?
De moment tenim 23° . La part decimal la multipliquem per 60 i tindrem els minuts, així doncs, $0,48 \cdot 60 = 28,8'$. De moment tenim $28'$. La part decimal la multipliquem per 60 i tindrem els segons, així doncs, $0,8 \cdot 60 = 48''$. I la resposta serà: $23^\circ 28' 48''$.
- 2) Doneu en graus d'angle $12^\circ 25' 36''$.
Agafem els $36''$ i els dividim per 60 i tindrem minuts, així tenim: $36:60 = 0,6'$. Aquests els sumem als $25'$ i ens dona $25,6'$. Per passar-los a graus cal dividir novament per 60 i tenim: $25,6:60 = 0,43^\circ$. Si els sumem als 12° del problema, tenim que la solució és: $12,43^\circ$.

En el dibuix anterior podem observar que cada angle té un arc de circumferència associat. Per calcular l'arc de circumferència associat a un angle cal tenir en compte que la longitud de la circumferència de radi r és $L = 2\pi r$ i aplicar-hi després proporcions.

Exemple:

3) Anem a determinar la longitud de l'arc associat a un angle de 40° en una circumferència de radi 1 dm.

La longitud d'aquesta circumferència és $L = 2\pi$ dm.

Aplicant la següent proporcionalitat, tenim:

$$\frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{L_{\text{arc}}}{2\pi}$$

$$\text{d'on } L_{\text{arc}} = \frac{40^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2}{9} \cdot \pi \text{ dm.}$$

El radià es defineix com l'amplitud d'un angle que té associat un arc de circumferència d'igual longitud que el radi.

Com la longitud d'una circumferència de radi 1 és 2π , l'angle que determina una volta de circumferència serà de 2π radians, i també, de 360° , i en conseqüència, la meitat de la circumferència ens determina un angle de π radians, o bé, de 180° . D'aquí podem deduir una relació que ens permeti passar d'una unitat de mesura d'angles a l'altra fàcilment.

Observeu:

Un mateix angle el podem mesurar en graus sexagesimals i en radians. Anem a suposar que en graus amida n° i en radians, α rad.

Aquí, la següent proporcionalitat: $\frac{n^\circ}{\alpha \cdot \text{rad}} = \frac{180^\circ}{\pi \cdot \text{rad}}$

Exemple:

4) Passeu a graus sexagesimals un angle que amida 1 radià.

$$\frac{n^\circ}{1 \cdot \text{rad}} = \frac{180^\circ}{\pi \cdot \text{rad}}$$

$$\text{d'on } n^\circ = \frac{180^\circ \cdot 1 \cdot \text{rad}}{\pi \cdot \text{rad}} = 57,2957^\circ.$$

2. Raons trigonomètriques d'un angle agut.

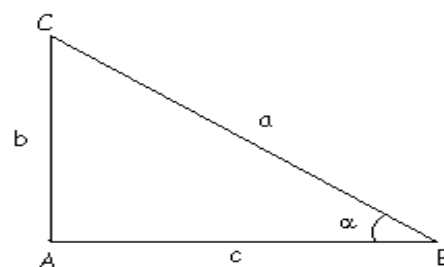
La proporcionalitat entre els costats de triangles rectangle semblants ens permet definir el que coneixem com a raons trigonomètriques d'un angle agut.

Observeu les següents relacions:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} \quad , \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad i \quad \frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$$

Cada una d'elles ens defineix una raó trigonomètrica diferent de l'angle agut α .

Considerem el triangle ABC, rectangle en A. Definim...



- **Sinus de l'angle α** a la raó entre la longitud del catet oposat i la longitud de la hipotenusa, és a dir, $\sin \alpha = \frac{b}{a}$.
- **Cosinus de l'angle α** a la raó entre la longitud del catet contigu i la longitud de la hipotenusa, és a dir, $\cos \alpha = \frac{c}{a}$.
- **Tangent de l'angle α** a la raó entre la longitud del catet oposat i la longitud del catet contigu, és a dir, $\tan \alpha = \frac{b}{c}$.

Exemple:

5) Del triangle rectangle ABC de la figura anterior, coneixem els dos catets: $b = 2 \text{ cm}$ i $c = 3 \text{ cm}$. Anem a determinar les raons trigonomètriques de l'angle α i també l'amplitud de l'angle agut.

Com desconeixem el valor de la hipotenusa caldrà trobar-la aplicant el Teorema de Pitàgores, així doncs, tenim: $a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$.

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \quad \text{i} \quad \tan \alpha = \frac{2}{3}.$$

Si volem trobar l'angle α farem ús de la calculadora utilitzant qualsevol d'aquestes tres raons trigonomètriques, així per exemple, si considerem:

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} = 0,666666666, \text{ posarem en pantalla } 0,666666666 \text{ i prement la tecla } \mathbf{INV}$$

(o bé **SHIFT**) i després la tecla **tan**, la pantalla ens donarà el valor 33,69006753; això ens diu que l'angle α és 33,69°.

Dues relacions importants entre les raons trigonomètriques d'angle agut són:

1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (coneguda com Teorema Fonamental de la Trigonometria).

2) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Totes dues de fàcil demostració.

3. Resolució de triangles rectangles.

La utilitat pràctica de les raons trigonomètriques és, principalment, el càlcul de longituds, distàncies i angles, és a dir, la resolució de triangles rectangles. Els següents exemples ens donen una idea de l'abast d'aquesta afirmació.

Exemples:

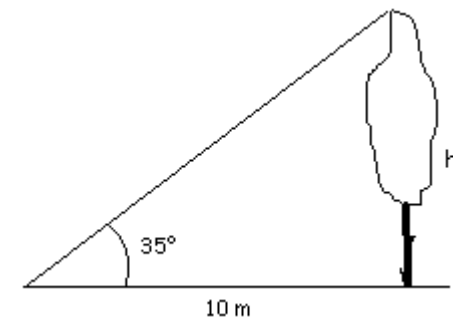
6) D'un triangle rectangle coneixem la hipotenusa $a = 5 \text{ cm}$ i l'angle B d'amplitud 30°, anem a trobar les altres dades, és a dir, els dos catets i l'altre angle.

Fent $b = a \cdot \sin \alpha$, tenim: $b = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2,5 \text{ cm}$.

Fent $c = a \cdot \cos \alpha$, tenim: $c = 5 \cdot \cos 30^\circ = 4,33 \text{ cm}$.

I, tenint en compte que la suma dels dos angles aguts d'un triangle rectangle sumen 90°, tenim que $\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

7) Un noi situat a 10 m del peu d'un arbre, observa la part més alta de l'arbre amb un angle d'elevació de 35° . Quina altura té l'arbre?



Observant el dibuix adjunt, podem deduir fàcilment que: $\tan 35^\circ = \frac{h}{10} = 0,70$.

D'aquí que $h = 0,70 \cdot 10 = 7$ m.

4. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol.

Considerem la circumferència de radi 1 amb centre en l'origen de coordenades i un angle α .

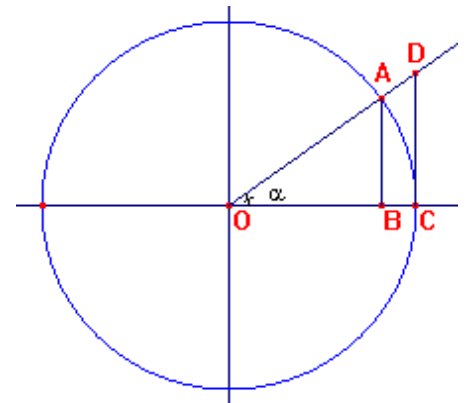
Si l'angle α és del primer quadrant, del gràfic adjunt deduïm que:

$OA = OC = 1$ i les raons trigonomètriques de l'angle α són:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = AB$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = OB$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{DC}{OC} = DC$$

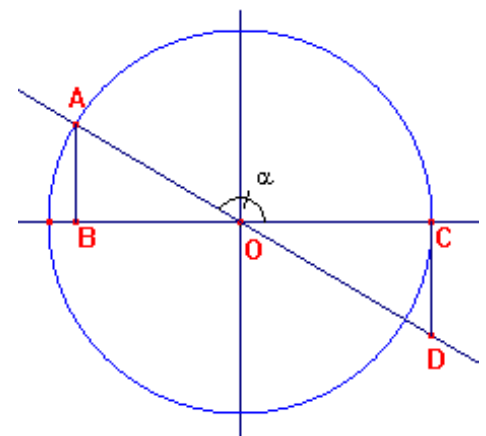


Si l'angle α és del segon quadrant, del gràfic adjunt deduïm que $OA = OC = 1$ i les raons trigonomètriques de l'angle α són:

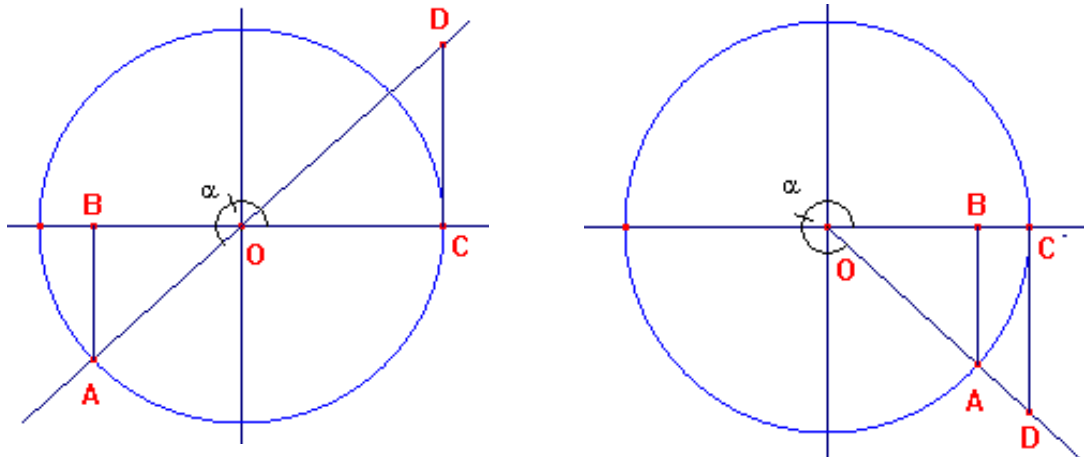
$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = AB$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = OB$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{DC}{OC} = DC$$



I de forma anàloga en els altres dos quadrants.



Als segments AB, OB i DC se'ls coneix com a **segments trigonomètrics** i representen al sinus, cosinus i tangent de l'angle α respectivament.

És fàcil deduir a partir d'aquests gràfics que el **Teorema Fonamental de la Trigonometria**, és a dir, que l'expressió:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

continua essent vàlida per un angle α qualsevol. En efecte:

Com $\sin^2 \alpha = AB^2$ i $\cos^2 \alpha = OB^2$, tenim que:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = AB^2 + OB^2 = OA^2$ pel Teorema de Pitàgores, i com $OA = 1$, tenim que:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

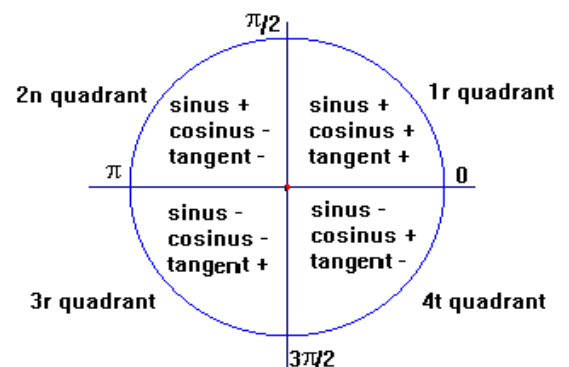
Les raons inverses del sinus, cosinus i tangent s'anomenen respectivament cosecant, secant i cotangent. Aquestes venen definides per:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \text{i} \quad \cotag \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

A partir del Teorema Fonamental de la Trigonometria, podem deduir altres relacions importants:

- 1) $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$.
- 2) $1 + \cotag^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.

Segons que l'angle α es trobi en el primer, segon, tercer o quart quadrant, les raons trigonomètriques prenen el signe + o bé -. Aquests signes són fàcilment deduïbles a partir dels quatre gràfics anteriors. El següent esquema ens dona els signes d'aquestes raons en funció del quadrant on es troba l'angle.



5. Reducció d'un angle qualsevol a un del primer quadrant.

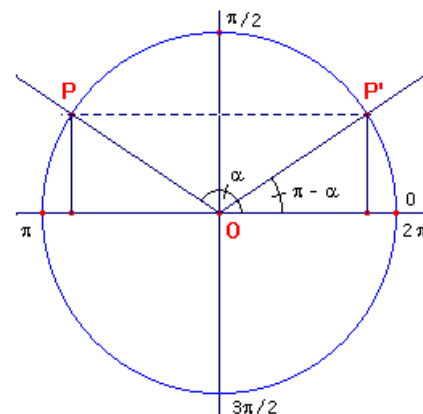
Coneixent les raons de 0° a 90° podem deduir fàcilment les raons de qualsevol angle, només cal tenir en compte l'angle del primer quadrant que té les mateixes raons trigonomètriques i la regla de signes de l'apartat anterior. Distingirem els següents casos:

Cas 1: L'angle α és del segon quadrant, és a dir,
 $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Podem observar que el punt simètric de P respecte l'eix d'ordenades és P', i que aquest determina en el primer quadrant un angle d'amplitud $\pi - \alpha$. Observant el dibuix, tenim que:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

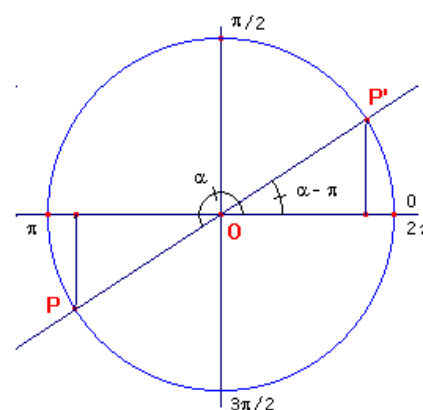
Els angles α i $\pi - \alpha$ reben el nom de **suplementaris**, ja que sumats donen un angle pla (180°).



Cas 2: L'angle α és del tercer quadrant, és a dir,
 $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Podem observar que el punt simètric de P respecte de l'origen és P', i que aquest determina en el primer quadrant un angle d'amplitud $\alpha - \pi$. Observant el dibuix, tenim que:

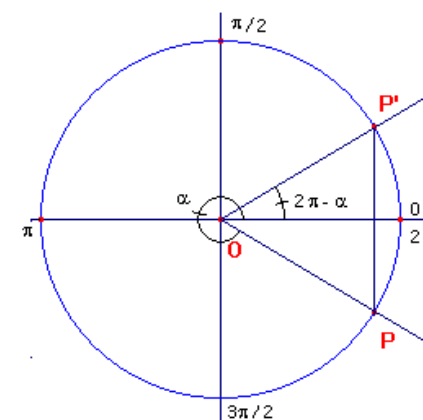
$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \pi) &= -\sin \alpha \\ \cos(\alpha - \pi) &= -\cos \alpha \\ \tan(\alpha - \pi) &= \tan \alpha\end{aligned}$$



Cas 3: L'angle α és del quart quadrant, és a dir,
 $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

Podem observar que el punt simètric de P respecte de l'eix d'abscisses és P', i que aquest determina en el primer quadrant un angle d'amplitud $2\pi - \alpha$. Observant el dibuix, tenim que:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$



Exemple:

8) Sabem que l'angle α és del 4t quadrant i que $\cos \alpha = 1/3$. Quant valen el sinus i la tangent d'aquest angle?

Pel Teorema fonamental de la Trigonometria, tenim: $\sin^2 \alpha + (1/3)^2 = 1$, d'on $\sin^2 \alpha = 1 - 1/9 = 8/9$, i $\sin \alpha = \pm \sqrt{8/9} = \pm 2\sqrt{2}/3$. Però com l'angle és del 4t quadrant, el sinus només potser negatiu, d'aquí que $\sin \alpha = -2\sqrt{2}/3$.

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}.$$

Cas 4: L'angle α és negatiu.

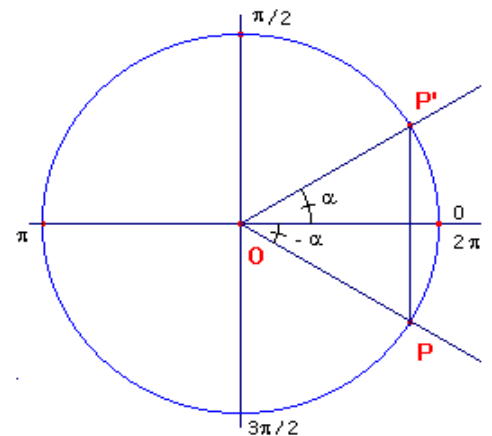
Podem observar que el punt simètric de P respecte de l'eix d'abscisses és P', i que aquest determina en el primer quadrant un angle d'amplitud $-\alpha$. Observant el dibuix, tenim que:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tag}(-\alpha) = -\operatorname{tag} \alpha$$

Com podem observar, per a conèixer les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol, en tenim prou si coneixem les raons trigonomètriques dels angles del 1r quadrant. Ara bé, en tindrem prou si coneixem les raons trigonomètriques dels angles de la primera meitat, ja que:


Cas 5: L'angle α pertany a la segona meitat del primer quadrant.

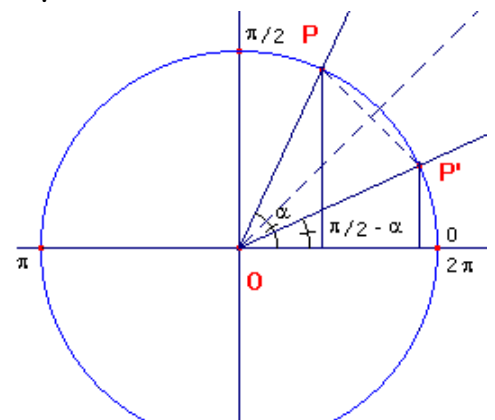
Podem observar que el punt simètric de P respecte de la bisectriu del primer quadrant és P', i que aquest determina en la primera meitat del primer quadrant un angle d'amplitud $\pi/2 - \alpha$. Observant el dibuix, tenim que:

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tag}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cotag} \alpha$$

Els angles α i $\pi/2 - \alpha$ reben el nom de **complementaris**, ja que sumats donen un angle recte (90°).


Exemple:

7) Sabem que $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$, anem a calcular $\sin 135^\circ$ i $\cos 135^\circ$.

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2.$$

$$\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2, \text{ ja que pel Teorema Fonamental de la Trigonometria tenim que: } \cos 45^\circ = \sqrt{1 - (\sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2.$$

8) Sabent les raons trigonomètriques de l'angle de 30° , determineu $\sin 210^\circ$, $\cos 330^\circ$ i $\operatorname{tag} 150^\circ$.

$$\sin 210^\circ = -\sin(210^\circ - 180^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2.$$

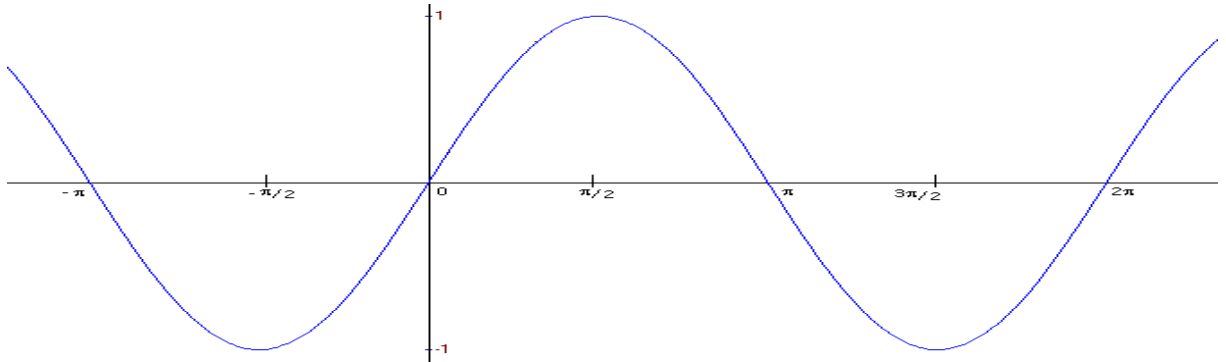
$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 330^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2.$$

$$\operatorname{tag} 120^\circ = -\operatorname{tag}(180^\circ - 150^\circ) = -\operatorname{tag} 30^\circ = -\sqrt{3}/3.$$

6. Funcions trigonomètriques.

6.1. La funció sinus.

A la funció $f(x) = \sin x$ se l'anomena **funció sinus** (la variable x expressada sempre en radians). La seva gràfica és:

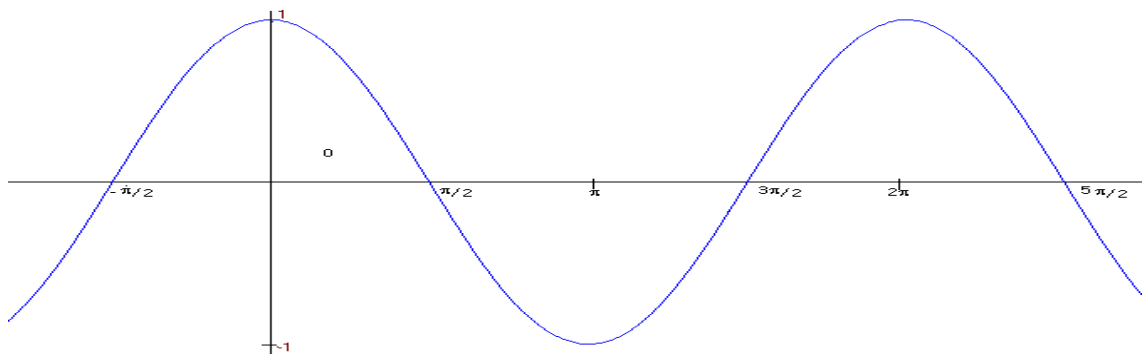


I de la gràfica podem deduir les següents propietats de la funció sinus:

- 1) $D_f = \mathbb{R}$.
- 2) $R_f = [-1, 1]$.
- 3) És contínua.
- 4) És creixent i decreixent a intervals (doneu un interval de creixement i un altre de decreixement).
- 5) És còncava i convexa a intervals (doneu un interval de concavitat i un altre de convexitat).
- 6) Té màxims, mínims i punts d'inflexió (doneu les coordenades d'un màxim, d'un mínim i d'un punt d'inflexió).
- 7) És periòdica, de període 2π . Això vol dir que coneixent el tros de que va de $-\pi$, a π , podem reproduir tot el gràfic de la funció ja que aquest es repeteix indefinidament.
- 8) És simètrica respecte de l'origen de coordenades.

6.2. La funció cosinus.

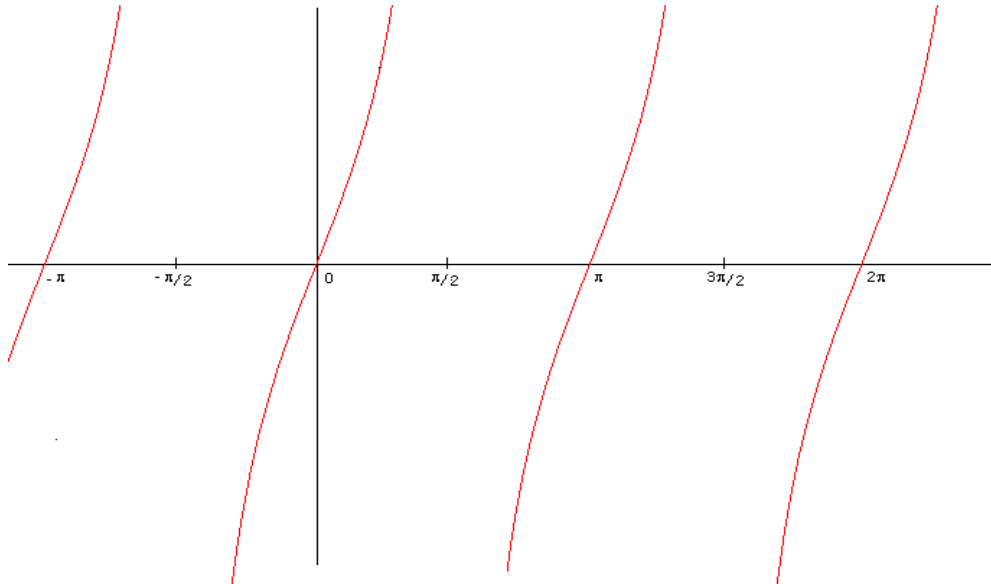
A la funció $f(x) = \cos x$ se l'anomena **funció cosinus** (la variable x expressada sempre en radians). La seva gràfica és:



A partir del gràfic, podem deduir fàcilment les propietats característiques de la funció cosinus. Quines són aquestes propietats?

6.3. La funció tangent.

A la funció $f(x) = \tan x$ se l'anomena **funció tangent** (la variable x expressada sempre en radians). La seva gràfica és:



A partir del gràfic, podem deduir fàcilment les propietats característiques de la funció tangent. Quines són aquestes propietats?

Les funcions inverses de les funcions trigonomètriques són:

- a) Si $f(x) = \sin x$, la funció inversa és $f^{-1}(x) = \arcsin x$, és a dir: $\sin x = y \Leftrightarrow \arcsin y = x$.
El domini de la **funció arc sinus** és $[-1,1]$ i el recorregut $[-\pi, \pi]$.
- b) Si $f(x) = \cos x$, la funció inversa és $f^{-1}(x) = \arccos x$, és a dir: $\cos x = y \Leftrightarrow \arccos y = x$.
El domini de la **funció arc cosinus** és $[-1,1]$ i el recorregut $[0, \pi]$.
- c) Si $f(x) = \tan x$, la funció inversa és $f^{-1}(x) = \arctan x$, és a dir: $\tan x = y \Leftrightarrow \arctan y = x$.
El domini de la **funció arc tangent** és $\mathbb{R}$ i el recorregut $(-\pi/2, \pi/2)$.

Com serien els gràfics d'aquestes funcions? Podeu construir-los tenint en compte que "els gràfics de funcions inverses són simètrics respecte de la bisectriu del 1r i 3r quadrant".

Exemple:

9) Si $\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$, aleshores $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

10) Gràcies a les funcions inverses podem resoldre equacions del tipus $\sin x = 1$, o bé, $\cos x = -1/2$. En aquests casos hem de determinar el valor x en...

$$\arcsin 1 = x \quad \text{i} \quad \arccos(-1/2) = x$$

Fent ús de la calculadora i de les tecles $\sin^{-1}$ i $\cos^{-1}$, podem determinar el valor de x en graus. Passar-lo a radians no et serà difícil.

La solució seria per a $\arcsin 1 = \pi/2$ i per a $\arccos(-1/2) = 5\pi/6$ i $-\pi/6$.

EXERCICIS DE REFORÇ

- Compareu l'angle d'amplitud $75^{\circ} 20' 24''$ amb l'angle d'amplitud 1,31 radians. Quin és el més gran? Justifiqueu la vostra resposta.
- Si $\cos \alpha = -1/6$ i α és del tercer quadrant, es demana:
 - La representació gràfica de l'angle α .
 - Les altres raons trigonomètriques.
- Si $\tan \alpha = -3$ i α és un angle més gran que π però més petit que 2π , es demana:
 - En quin quadrant es troba l'angle α ? Representeu-lo.
 - Quines són les raons trigonomètriques d'aquest angle?
- Si $\sin 37^{\circ} = 3/5$, determineu:
 - El sinus, cosinus i tangent de 143° .
 - El sinus, cosinus i tangent de 217° .
- Completeu la taula:

Raons\Graus	30°	45°	60°				225°		300°
Sinus				$-1/2$	$\sqrt{2}/2$				
Cosinus					$-\sqrt{2}/2$	$1/2$		-1	
tangent				$\sqrt{3}/3$		$-\sqrt{3}$			
- Determineu el sinus, cosinus i tangent dels angles de 135° , 240° , 330° i 870° .
- Resoleu els triangles ABC, rectangle en A, si coneixem:
 - La hipotenusa $a = 6$ cm i l'amplitud de l'angle $B = 30^{\circ}$.
 - La hipotenusa $a = 6$ cm i el catet $c = 2$ cm.
- Calculeu l'altura d'una torre, situada en terreny horitzontal, sabent que amb un teodolit de 1,20 m d'altura, col·locat a 20 m d'ella s'ha mesurat l'angle de 60° , forma l'horitzontal amb la visual dirigida al punt més alt.
- Des d'un cert punt de terra s'observa la part més alta d'un gratacels formant un angle de 30° amb l'horitzontal. Si ens apropem 75 m cap al peu del gratacels, l'angle es fa de 60° . Quina és l'altura d'aquest edifici?
- La base d'un triangle isòsceles amida 54 cm i els angles en la base 42° . Trobeu els costats iguals, l'altura i l'àrea d'aquest triangle.
- Determineu els angles x compresos entre 0 i 2π que verifiquen:
 - $\sin x = -\sqrt{3}/2$
 - $\cos x = \sqrt{2}/2$
 - $\tan x = -\sqrt{3}$
- És certa la igualtat $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$? Justifiqueu la vostra resposta.
- Representeu els gràfics de les funcions $f(x) = 2 \cdot \sin x$ i $g(x) = \sin(2x)$.