Cultures matemàtiques emergents i el seu ensenyament

Víctor Mañosa Fernández
Departament de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya
Colom 1, 08222 Terrassa.
victor.manosa@upc.es

26 d'abril de 2002

Resum: *Aquest article no és altra cosa que un conjunt de reflexions personals a l'entorn del per què les matemàtiques que hem estudiat són com són. Crec que una anàlisi de la seva història mostra que el desenvolupament de les matemàtiques no ha estat un procés "continu i creixent"–model que moltes vegades s'assumeix de manera implícita–, sinó que ha respost a les pulsions del món en què han estat desenvolupades. Això fa entreveure que potser en un futur més o menys proper poden emergir altres maneres d'entendre la matemàtica. Finalment a les darreres seccions es fan algunes reflexions sobre l'ensenyament de la matemàtica, orientades principalment a l'àmbit universitari.*

1 Un paper per la història

L'any 1962, T.S. Kuhn va proposar un nou model per al cultiu de la història de les ciències, que també va suposar una nova manera d'abordar-ne els aspectes filosòfics, els metodològics i l'ensenyament. Les idees de Kuhn giren a l'entorn del concepte de *paradigma*. Un paradigma és aquell marc de realitzacions científiques que durant un període de temps proporciona problemes i solucions a una comunitat científica. Així, l'activitat científica efectiva desenvolupada en aquest context s'anomena *ciència* *normal.* Quan mitjançant el cultiu de la ciència normal s'arriba a un punt en què el marc es satura, ja sigui per contradiccions internes, pel descobriment de noves evidències o, com sol passar en matemàtiques, per exigències culturals, els antics paradigmes deriven cap a d'altres de nous, produint–se el que Kuhn, a [15], anomenà *revolucions científiques.* Quan parlem d'exigències culturals, entenem el concepte en un sentit ampli, incloent entre d'altres:

(i) *Necessitats pràctiques o tecnològiques.* Per exemple, la invenció i el desenvolupament d'eines per al càlcul dels logaritmes als segles XVI i XVII (com abans ho va ser el desenvolupament de tècniques per al càlcul de taules trigonomètriques) sorgeix de la necessitat de disposar d'eines eficients de càlcul astronòmic, absolutament necessàries per a la navegació i el comerç (vegeu H. Wussing [19] p.109–110, per exemple).

(ii) *Emergència de noves classes socials.* A l'occident, el paradigma científic del món grec, adoptat per les classes dominants de l'edat mitjana i del renaixement, arriba a una crisi al segle XVIII. Aquesta situació està molt condicionada pels canvis en la manera de concebre el món, que propicien una nova classe emergent: la burgesia. M. Hormigón assenyala ([12] p.54–55): "Al caer hecha añicos una concepción del mundo en cuya defensa se había llegado al extremo de quemar vivos a sus detractores y al presentarse el hecho de que la demostración matemática de lo que defendían los inmolados era más correcto que lo que postulaban los supuestos tribunales de justicia, la implicación ideológica estaba clara. Había que rehacer toda la teoría del conocimiento (...). A lo largo del siglo XVIII la progresiva acritud de los conflictos sociales entra en el terreno de la teoría del conocimiento: las clases dominantes sostienen el esquema del saber jerarquizado de raíces medievales, la burguesía ascendente (...) propugna el cultivo de las ciencias que sirvan (...). Las matemáticas encontrarán un lugar bajo el sol de las ciencias útiles". Aquests objectius pragmàtics van suscitar avenços en la matemàtica que auxiliava l'òptica, la mecànica, la teoria de la calor, etc.

(iii) *Cànons que dicten les autoritats acadèmiques.* En efecte, malgrat que en ciència no hi ha principi d'autoritat, el cas és que l'activitat científica, com a activitat humana, no s'escapa de la pressió que exerceix la part de la comunitat científica que ocupa esferes de poder. Per posar un exemple concret, durant els anys quaranta i cinquanta la matemàtica europea va estar impregnada per la manera de fer que va impulsar el grup Bourbaki, caracteritzada per l'estricta aplicació del mètode axiomàtic, sense cap concessió a la "intuició geomètrica". La situació no era favorable per als matemàtics que no s'adherissin als plantejaments de Bourbaki, que podien quedar exclosos de *l'activitat matemàtica normal* entre els anys quaranta i setanta. A. Borel (també membre de Bourbaki) (a [3]), explica que: "The fifties was thus outwardly a time of great success for Bourbaki (...) Of course there were some grumblings against Bourbaki's influence. We had witnessed progress in, and a unification of, a big chunk of mathematics, chiefly through rather sophisticated (at the time), essentially algebraic methods. The most successful lecturers in Paris were Cartan and Serre (també membres de Bourbaki), who had a considerable following. The mathematical climate was not favorable to mathematicians with a different temperament, a different approach. This was indeed unfortunate, but could hardly be held against Bourbaki members, who did not force anybody to carry on research in their way". Al respecte, en un comentari sobre la vida i miracles de B. Mandelbrot (certament dramatitzat i un pèl hagiogràfic), J. Gleick hi escriu: "En ningún lugar estos valores (els de Bourbaki) estaban tan codificados como en Francia, y en ella Bourbaki triunfó como sus fundadores jamás hubiesen imaginado. Sus preceptos, estilo y notación se hicieron obligatorios. Alcanzó la invencible rectitud que nace de imponerse a los mejores estudiantes y de producir un caudal constante de matemáticas logradas. Su dominio en la École Normale era absoluto, e insoportable para Mandelbrot. Huyó (sic) de aquella escuela por culpa de Bourbaki y, diez años después, de Francia por la misma razón". (Vegeu [7] p.97.)

(iv) *Modes.* Sovint emergeixen amb molta potència àrees de producció científica que no sempre arriben a resultats tan importants com els que, a priori, semblava que podien prometre. El professor Ll. Santaló ([18] p.95.) posa com a exemple de modes (l'elecció és seva) les recents teories de catàstrofes, de conjunts difusos o de fractals.

Tot i que les idees de Kuhn no han trobat adhesions generalitzades dins la comunitat matemàtica, els principals conceptes de la seva teoria són perfectament adaptables a l'anàlisi del fet matemàtic, i en particular a l'anàlisi de l'ensenyament de les matemàtiques. Penso que la impermeabilitat de les idees de Kuhn a la comunitat científica (i molt especialment a la comunitat matemàtica, que històricament s'ha presentat a sí mateixa com una comunitat altament aristocratitzada), es deu parcialment a que una visió de la ciència com la que proposa Kuhn destrueix el mite del científic escollit per alimentar la flama sagrada ("Oncles Petros" inclosos), que tan útil ha estat a l'hora de conformar un estat d'opinió submís (de l'alumne respecte del professor, de l'activitat docent respecte de l' activitat investigadora...), un conformisme obscurantista molt útil per a algun dels gurús del món científic. El mateix Kuhn (vegeu T.S. Kuhn Op. Cit. p.72) ens proposa raons per a la humilitat quan ens descriu quin és el paper del científic en el context de la ciència normal: "La empresa científica como un todo resulta útil de vez en cuando, abre nuevos territorios, despliega orden y pone a prueba creencias aceptadas desde hace mucho tiempo. Sin embargo el individuo dedicado a la resolución de un problema de investigación normal casi nunca hace alguna de esas cosas. Una vez comprometido, su aliciente es de tipo bastante diferente. Lo que le incita a continuar entonces es la convicción de que, a condición de que tenga la habilidad suficiente para ello, logrará resolver un enigma que nadie ha logrado resolver hasta entonces o, por lo menos, no tan bien. Muchas de las mentalidades científicas más brillantes han dedicado toda su atención profesional a enigmas exigentes de ese tipo. La mayoría de las veces, cualquier campo particular de especialización no ofrece otra cosa que hacer, hecho que no lo hace menos atrayente para los adictos del tipo apropiado". En conseqüència, el culte a la genialitat s'ha de posar en dubte, ja que com assenyala el professor Hormigón (M. Hormigón Op. Cit. p. 39): "Con este concepto (el de ciencia normal), no sólo el supuesto genio merece ser estudiado como objeto histórico, ya que ese supuesto genio pertenecerá a una o varias comunidades científicas, que además no serán ajenas, ni mucho menos, a sus realizaciones".

2 La cultura adquirida: el paradigma hilbertià

Així com la història de la ciència ens proveeix de diferents paradigmes científics, també existeixen diferents paradigmes didàctics per a la seva difusió, conforme als ideals en què neixen i es desenvolupen.

Els professors de matemàtiques d'avui som hereus d'un paradigma didàctic que, parafrasejant al professor Hormigón, anomenaré paradigma hilbertià: "Resumiendo sintéticamente los aspectos definitorios del paradigma hilbertiano, se debe destacar,

en primer lugar, que lo que se produce a finales del siglo XIX es la definitiva ruptura con el logos platónico. Ya no son los objetos los que deben estar rigurosamente definidos, sino las relaciones entre esos objetos. También se produce una variación significativa en la formalización axiomática, las proposiciones que se privilegian con el rasgo de ser verdaderas ya no necesitan de ninguna evidencia para ser admitidas sino que dependen del libre albedrío del autor (...) pudiendo los profesionales trabajar con cualesquiera objetos de cualquier conjunto. En estos conjuntos existen operaciones que relacionan los objetos entre sí con una serie de propiedades que generan unas estructuras determinadas". I també: "Externamente, para suplicio incruento (sic) de docentes y alumnos, las matemáticas hilbertianas perdieron todo anclaje con el espacio visible o imaginable. Los sentidos, principalmente el de la vista, tan engañoso, perdieron todo su potencial probatorio y fueron substituidos como *único requisito de prueba por la consistencia lógica del encadenamiento proposicional*" (M. Hormigón Op. Cit. p.67, el subratllat és meu). Hem d'assenyalar que, per a un cert tipus de matemàtiques contemporànies d'alt nivell, potser la pèrdua de la intuïció és un peatge ineludible per assolir un cert progrés. Però aquest no és el cas de la majoria dels continguts de les assignatures de matemàtiques de les carreres "aplicades".
En aquest paradigma hilbertià, encara vigent, hem estat ensinistrats tots els que -des d'alguna generació enrera, i fins el dia d'avui- estem al davant dels alumnes. V.I. Arnol'd, a [1] p.23, en un paràgraf un xic apocalíptic, descriu les conseqüències d'aquest fet: "El domini d'aquest tipus de matemàtics ha conduït al predomini de les matemàtiques axiomàtiques escolàstiques, especialment en l'ensenyament (i fins i tot en l'ensenyament secundari), contra el qual la societat reacciona de manera natural i justificada d'una manera fortament negativa. Com a resultat es té el rebuig universal que s'observa envers les matemàtiques (...) La comunitat matemàtica té una part de responsabilitat en la pressió dels governs i de la societat en general, observada arreu i dirigida a la destrucció de la cultura matemàtica, com a part del cabal de cada persona i, en especial, dirigida a la destrucció de l'ensenyament matemàtic". Respecte a la darrera frase d'aquest text, jo puntualitzaria que certa part de la responsabilitat cau sobre *certes actituds* de certa part de la comunitat matemàtica que està en condicions de formar opinió, no pas de tota en general.
En definitiva, som hereus d'aquesta situació, i per això alguns creiem que estem davant d'un model esgotat. No sé com superarem aquest model, però crec que un primer pas en favor de la superació de la *barrera social* que predisposa la societat

(i l'alumnat) en contra de les matemàtiques es podria donar si tenim cura que els continguts que presentem siguin útils als nostres alumnes (vegeu les Seccions 4 i 5); qualsevol actitud aristocràtica que defensi únicament una matemàtica per si mateixa és, per anacrònica, un frau als alumnes que formem.

3 Emergeix un paradigma experimental?

Intentaré justificar la meva impressió que una nova cultura matemàtica, on hi haurà un paper *explícit* pels mètodes heurístics en el fer i en la transmissió de la matemàtica, està emergint. De fet, com assenyala V.I. Arnol'd (Ib., p.23), "Les matemàtiques són una ciència experimental, una part de la física teòrica i un membre de la família de les ciències naturals. Els principis fonamentals de la construcció i l'ensenyament de totes aquestes ciències són aplicables a les matemàtiques".

Les metodologies heurístiques formen part del fet matemàtic des del seus orígens: el mètode d'analogia mecànica d'Arquímedes, la tècnica de Neper per a la formació de les taules logarítmiques, o les consideracions físiques que va emprar D. Bernoulli per trobar la solució general de l'equació de la corda, són exemples de la presència del mètode experimental en l'activitat matemàtica de tots els temps. Cal dir que l'aproximació experimental no és exclusiva dels camps que avui dia conformen l'anomenada "matemàtica aplicada". A la declaració d'intencions de la revista *Experimental Mathematics* (que no és una revista de "matemàtica aplicada") hi trobem: "Experimental Mathematics was founded in the belief that theory and experiment feed on each other, and that the mathematical community stands to benefit from a more complete exposure to the experimental process. The early sharing of insights increases the possibility that they will lead to theorems: an interesting conjecture is often formulated by a researcher who lacks the techniques to formalize a proof, while those who have the techniques at their fingertips have been looking elsewhere. Even when the person who had the initial insight goes on to find a proof, a discussion of the heuristic process can be of help, or at least of interest, to other researchers. There is value not only in the discovery itself, but also in the road that leads to it" (vegeu [13]).

Com he dit, el mètode experimental és propi de la tradició matemàtica de tots els temps. Crec, però, que estem davant d'una nova cultura matemàtica perquè per primera vegada hi ha un moviment que reivindica aquests mètodes com a propis de l'activitat matemàtica, al marge d'experiments mentals personals. El suport físic

dels experiments matemàtics és (en part) l'ordinador, i l'experimentació serà a la matemàtica el mateix que a les altres ciències.
Per altra banda, l'emergència d'un *paradigma experimental* està en relació amb el fet que la civilització tecnològica demana de la matemàtica que ajudi a la construcció de models per representar la complexitat del món i per simular–la. El meu parer és que raons de caràcter econòmic propiciaran que el subconjunt d'experiments matemàtics que anomenem simulacions *adquireixin dins d'altres disciplines científiques el mateix status que els experiments reals.* Al respecte recomano la lectura de la ponència del professor H. Neunzert, recollida a [16].

4 Algunes consideracions sobre l'ensenyament

El paradigma experimental emergeix en contacte directe amb l'enginyeria, la física, la biologia, etc, esperonat per les necessitats d'aquestes disciplines. Per tant caldrà estar atents a les necessitats d'aquest paradigma a l'hora de formar futurs matemàtics, i a l'hora de formar futurs usuaris de la matemàtica. A continuació esbossaré alguns dels seus elements que, segons el meu criteri, poden ajudar a formar matemàtics i usuaris de la matemàtica.
Comencem amb un exemple: com diu el professor G. Brousseau, els matemàtics tenim un amor particular a la demostració matemàtica com a prova de la veracitat i el rigor d'allò que afirmem a l'aula. La necessitat de la demostració és una herència cultural que prové del principi humanista "la veritat ha de ser compartida" (que, és clar, comparteixo). En l'actualitat la demostració forma part de les matemàtiques, però no sempre ha estat així (al respecte vegeu la molt significativa anècdota sobre la reintroducció dels *elements* d'Euclides a la Xina del segle passat, que trobareu a [2]). No proposo que la demostració s'hagi d'eliminar de l'ensenyament de les matemàtiques, però crec que no sempre és necessària, ni qualsevol tipus de demostració serveix per transmetre matemàtiques. Així, una demostració de tipus sintètic (aquelles que es segueixen únicament com un encadenat, lògicament consistent, de proposicions) no és didàcticament defensable. Les demostracions de tipus sintètic poden servir per calmar les consciències dels formalistes, però no contribueixen a la formació de l'alumne. No permeten assolir els objectius que constitueixen la dotació de significat de l'objecte matemàtic, és a dir: *adherir els conceptes a la seva funció i explicitar les relacions (de causalitat, de complementarietat, de generalització, etc.) entre els diferents objectes*

al marge de les relacions formals. No defenso l'eliminació dels mètodes sintètics a l'aula, ja que existeixen condicions que poden justificar-ne l'ús. En efecte, tal i com assenyala el professor D. Juher, "En el procés de formació de l'alumne ha d'aparèixer en algun moment el raonament sintètic; no com a objectiu, ni a tothora, però a la fi, ni que sigui per qüestions epistemològiques, l'alumne ha de saber què és una demostració sintètica". Evidentment el mode sintètic forma part de la cultura, per tant cal que sigui presentat en algun moment, però de manera selectiva. Així, si ensenyem (tot emprant–la en algun moment) la demostració per *reducció a l'absurd* (per posar un exemple de tipus de demostració que pot ser "no–constructiva") proveïm l'alumne d'un instrument de crítica que transcendeix l'àmbit de les matemàtiques. Sigui doncs benvinguda!
Els objectius d'adhesió dels objectes matemàtics al seu significat, en molts casos, poden ser assolits amb certa eficiència mitjançant una introducció causal i constructiva dels nous conceptes. L'aproximació causal i constructiva que es defensa aquí podria seguir el següent esquema:

1. Identificació de les necessitats que planteja un problema i dels objectius que defineixen una solució satisfactòria.

2. Repàs de les eines de les quals ja disposa l'alumne.

3. Adequació de les eines i introducció dels nous conceptes.

4. Definició dels conceptes.

5. Presentació dels nous resultats que donen lloc i complementen la solució satisfactòria indicada al punt 1.

Resumint, es contraposa l'esquema *justificació causal–construcció* a l'esquema *definició–demostració.* Defensem aquí una aproximació d'aquest estil principalment en estudis aplicats, ja que tal aproximació dota amb naturalitat de significat als objectes que hem introduït, els dota de necessitat, permet assolir amb més facilitat els resultats mitjans que necessitarem per relacionar el nou objecte amb d'altres ja coneguts.
Finalment, i en major grau en els estudis aplicats, qualsevol aproximació didàctica que pretengui dotar d'eines al alumnes ha de contenir "elements tous", els conceptes s'han d'introduir de manera que puguin ser fàcilment adaptables a les realitats de les disciplines dels nostres alumnes. La idea que les matemàtiques són boniques per se

és certa, però resulta inútil als nostres alumnes, que sens dubte arribaran a aquesta idea (si són prou sensibles) quan puguin veure la capacitat de les matemàtiques per modelar els fenòmens que els interessen, per resoldre els problemes que plantegen les seves disciplines i, en un altre nivell, com apareix la matemàtica no elemental a la vida quotidiana (bones fonts per trobar exemples d'això darrer les trobareu a [6] o [10], per exemple).

5 Alguns exemples d'aplicació

Principalment als estudis tècnics, alguns companys han destacat la importància de la introducció de l'estudi del que anomenem *modelització matemàtica*. L'aproximació demanada pels professors Arnol'd (vegeu [1]), Gómez i Urgellés ([8] i [9]) o May (citat a Ll. Santaló Op. Cit. p.106), en favor de la introducció de la modelització en els continguts de les assignatures de matemàtiques, pot ser molt ben implementable amb l'ajuda dels programes de simulació que avui en dia s'han generalitzat (alguns d'ells es poden obtenir gratuïtament a través d'Internet). Amb l'ajuda d'aquests programes podrem, literalment, experimentar; podrem preveure quins paràmetres controlen determinats canvis de comportament dels sistemes considerats, i en quin moment s'esdevenen canvis en el comportament qualitatiu de les solucions (bifurcacions). Caldrà ensenyar als nostres alumnes a moure's amb naturalitat pel laboratori que és l'ordinador, i a saber comparar entre la predicció del model (els resultats que ens mostrarà la màquina de resultes de l'aproximació numèrica o exacta gràcies al programari de càlcul simbòlic) i, eventualment, els resultats de possibles experiments reals (vegeu [8] i [9], o [11] per fer-vos una idea del tipus d'experiències que es poden dur a terme).
L'aproximació didàctica amb continguts de modelització matemàtica no és únicament aplicable als continguts tradicionals d'equacions diferencials, i en tot cas als d'estadística. Per exemple a [14] l'autor, seguint un esquema causal, introdueix conceptes de matemàtica discreta i de la teoria de nombres com a models matemàtics de la criptografia.
Com a final d'aquesta secció, permeteu–me una digressió de caire filosòfic (una altra més) sobre una certa obsessió personal: aquí modelitzar vol dir *representar matemàticament*, només això. Així, quan diem que el món és matematitzable entenem que, com que el nostre cervell pot representar matemàticament (ja sigui per la seva morfologia, per adaptació a uns patrons adquirits per segles de cultura, o per una

combinació d'aquestes causes), i que emprem aquesta capacitat per representar el món i fer prediccions. Convé no confondre aquesta definició amb *la superstició* segons la qual les estructures matemàtiques estan presents a l'estructura íntima de les coses. Aquest pensament es suggestiu i està molt arrelat en una determinada cultura científica. Així doncs, a vegades podem llegir comentaris com ara "No tinc cap dubte que això (el fet que els resultats matemàtics que després s'han aplicat s'hagin trobat independentment de cap aplicació específica) *respon al fet que les estructures matemàtiques es troben realment* al cor de les nostres experiències, és a dir, *al cor del món*" (C. Perelló [17] p.63, el subratllat és meu). D'altra banda, si el món està escrit en llenguatge matemàtic, i el coneixement científic és l'únic dipositari d'aquest, aleshores afirmar que la natura és essencialment matemàtica equival a proclamar la superioritat del coneixement científic de la natura (que per altra banda no sempre ha estat el mateix) sobre qualsevol altra manifestació del coneixement humà. Personalment rebutjo aquesta posició (al respecte, recomano la lectura provocadora, a vegades demagògica, i sempre iconoclasta de P.K. Feyerabend. Vegeu [4] o [5]).

6 La tecnologia a l'aula

En aquest punt tinc més preguntes que no pas respostes: la generalització dels ordinadors ha propiciat importants avenços en el desenvolupament de nous algorismes de càlcul numèric, que alhora han propiciat avenços cabdals en matemàtica aplicada, física, enginyeria i ciències socials. Aquest fet és la causa que avui en dia els continguts d'anàlisi numèrica estiguin presents als plans d'estudi de les carreres tècniques amb la naturalitat amb què hi són presents els elements del càlcul infinitesimal o de l'àlgebra lineal. La qüestió és: fins a quin punt la generalització dels paquets estadístics i dels programes que permeten la computació simbòlica i la simulació numèrica no ha de contribuir, d'una manera positiva, a un canvi en la manera amb què abordem les matèries tradicionals?

Està acceptat que a les assignatures amb continguts d'estadística es facin servir amb profusió els paquets estadístics, la instrucció en els quals està prevista en els plans d'estudis de les carreres d'estadística. Un motiu és que sembla raonable evitar el feixuc treball amb grans quantitats de dades, inherent a aquest tipus de continguts; el temps estalviat en càlculs tediosos i directes (sumes, productes) es pot dedicar a qüestions com ara la interpretació dels resultats o a l'estudi dels casos límit, és a dir

a explorar, a experimentar. També es parteix de la premisa que el futur professional treballarà amb un paquet estadístic com a plataforma per al tractament de dades. Doncs bé, per què no hem d'assumir amb la mateixa naturalitat la presència del software adequat en d'altres disciplines tradicionals?
Per exemple, si la majoria d'aspectes tècnics requerits a l'àlgebra lineal (resolució de sistemes d'equacions lineals, detecció de relacions de dependència lineal entre vectors, càlcul matricial) poden ser resolts prou satisfactòriament pels programes de computació simbòlica (manipuladors algebraics), no sembla raonable replantejar el temps que dediquem a l'anàlisi d'exemples i exercicis purament calculístics, per anar al cor dels conceptes i deixar els aspectes tècnics als manipuladors algebraics? Un altre exemple: si els programes de manipulació algebraica poden integrar pràcticament tota funció que es deixa integrar, de debò cal dedicar hores i hores a ensenyar la col·lecció (necessàriament incompleta) de casos i subcasos en què consisteix el càlcul de primitives?
Els exemples considerats es refereixen a aspectes tècnics, però la tecnologia també ens ha de fer plantejar fins a quin punt cal explicar a l'alumne una tècnica que no sigui rendible computacionalment. A mi em sembla que si una tècnica permet il·lustrar bé algun concepte potser cal presentar-la malgrat la seva "inutilitat computacional". Així doncs, explicarem el mètode d'interpolació polinòmica de Lagrange, perquè és didàcticament profitós, però acte seguit explicarem que en la pràctica cal aplicar la tècnica de diferències dividides, que per contra és un pèl més esotèrica. Ara bé: cal insistir a ensenyar determinants, si finalment des d'un punt de vista computacional (que és el que els nostres alumnes aplicaran en el seu exercici professional) resulten ser un desastre, i didàcticament acostumen, per raons de temps, a ser presentats com una recepta calculística sense cap significat?
La generalització massiva del programari matemàtic apte per a la docència ens haurà de fer replantejar a quins continguts caldrà seguir dedicant esforços, quins s'hauran d'esbossar i quins haurem de depurar, encara que siguin considerats tradicionals. Un criteri per abordar aquesta decisió pot ser (un entre d'altres) l'eficiència computacional.

Agraïment.

Vull expressar el meu agraïment sincer al professor David Juher de la Universitat de Girona, per la lectura *activa* i crítica d'aquestes notes.

Referències

[1] V.I. Arnold, *Models matemàtics durs i models matemàtics tous.* Butlletí SCM, Vol. 13, núm. 1 (1998) 7–26.

[2] G. Brousseau, *La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat.* Butlletí SCM, Vol. 11, núm. 1 (1996) 33-45.

[3] A. Borel, *Twenty–Five Years with Nicolas Bourbaki, 1949–1973.* Notices AMS, Vol. 45, núm 3 (1998) 373–380.

[4] P.K. Feyerabend, *Adiós a la razón.* Tecnos, Madrid 1992.

[5] P.K. Feyerabend, *Tratado contra el método.* Tecnos, Madrid 1997.

[6] A. Gasull (Ed.), *Fes Matemàtiques!.* Departament de Matemàtiques UAB. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra 2000.

[7] J. Gleick, *Caos, la creación de una ciencia.* Seix Barral, Barcelona 1988.

[8] J. Gomez i Urgellés, *La Modelització com a eina didáctica per a l'ensenyament de les matemàtiques.* Dins: *Experiències de millora de la qualitat docent a la UPC.* Servei de publicacions UPC, Barcelona 1997. p. 67–76.

[9] J. Gomez i Urgellés, *Per un nou ensenyament de les matemàtiques.* Ediciones CEAC, Barcelona 2000.

[10] J. Gomez i Urgellés, *L'altre cara de les matemàtiques.* El cep i la Nansa, Vilanova i la Geltrú 2000.

[11] M. Grau, M. Noguera, *Laboratori d'anàlisi matemàtica.* Dins: *Experiències de millora de la qualitat docent a la UPC.* Servei de publicacions UPC, Barcelona 2000. p.77–89.

[12] M. Hormigón, *Algunas ideas sobre paradigmas matemáticos para exponer la historia de las Matemáticas*. Dins: *Varia Mathematica I*, J. Chavarriga et alia (Eds.). Institut d'Estudis Ilerdencs, Lleida 2000. p.31–71.

[13] Internet: `http://www.expmath.org/expmath/philosophy.htm`

[14] D. Juher, *Introducció a la criptografia*. Publicacions Docents 15. Universitat de Girona. Servei de Publicacions, Girona 2000.

[15] T.S. Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica, Madrid 1997.

[16] H. Neunzert, *Mathematics as a key to the key tecnhologies*. Dins: *Les bases matemàtiques de la civilització tecnològica. Cicle Ferran Sunyer i Balaguer*, J. Aguadé (Ed.). Aula de ciència i cultura, 10. Fundació Caixa de Sabadell, Barcelona 1999. p.43–57.

[17] C. Perelló, *El paper predictiu de la matemàtica a la ciència*. Butlletí SCM, Vol. 13, núm. 1 (1998) 57–64.

[18] Ll. Santaló, *La matemàtica una filosofia y una técnica*. Ariel, Barcelona 1994.

[19] H. Wussing, *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España, Madrid 1998.