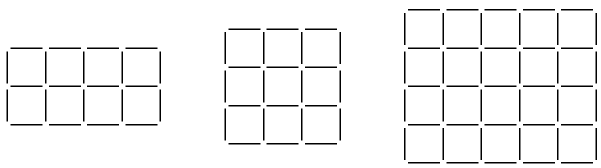
XXXV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 de desembre de 1998, de 16 a 20h.

1.–Determineu les possibles àrees dels tetràedres que tenen tres arestes de 2 metres i tres arestes de 3 metres.

2.–Disposicions rectangulars com les de la figura:



contenen respectivament 22, 24 i 49 llumins. Algunes disposicions, com la de 24 llumins, són quadrades. A més, amb 22 llumins es poden fer dues disposicions diferents, amb 24 només una i amb cinc llumins no se'n pot fer cap.

i) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer alguna disposició rectangular com les de la figura.

ii) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer una disposició quadrada.

iii) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer només una única disposició.

3.–Un bidó cilíndric, amb una massa en buit M, conté una massa m_0 d'oli quan és ple.

El centre de masses (o de gravetat, o baricentre) del bidó ple és en el punt mitjà. Al començar a buidar el bidó el centre de masses baixa, però, quan el bidó és buit, torna a ser en el punt mitjà.

Quina massa d'oli hi ha al bidó quan el centre de masses és en el seu punt més baix?

4.–Ens interessem per les parelles de funcions f, g que compleixen:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$$

a) Trobeu totes aquestes parelles en el cas $f = g$.

b) Trobeu totes les funcions g quan

$$f(x) = x^n$$

amb n enter i positiu.

XXXV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

12 de desembre de 1998, de 9 a 13h.

5.–

a) Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre senar de costats és parell.

b) Demostreu que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n \cdot 360°$, amb n enter.

6.–Proveu que, si tenim 1998 punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats, aleshores hi ha 666 triangles disjunts que els tenen com a vèrtexs.

7.–Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

8.–Trobeu tots els nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seves xifres.

XXXV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 i 12 de desembre de 1998.

Solucions:

1.–Hi ha tres possibles tetràedres:

a) una cara és un triangle equilàter de costat $2\,m$,

b) una cara és un triangle equilàter de costat $3\,m$, i

c) no hi ha cap cara que sigui un triangle equilàter.

Les àrees són:

$$a)\ \sqrt{3}+6\sqrt{2}\,, \qquad b)\ \frac{9}{4}\sqrt{3}+\frac{9}{4}\sqrt{7}\,, \qquad c)\ 4\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{7}$$

2.–Una disposició de $p \times q$ llumins té $p+1$ files de q llumins i $q+1$ columnes de p llumins. Per tant, conté

$$n=(p+1)q+p(q+1)=p+q+2pq \text{ llumins}$$

Llavors

$$2n+1=2p+2q+4pq=(2p+1)(2q+1)$$

Per tant:

i) Amb n llumins, la disposició és possible si, i només si, $2n+1$ no és primer.

ii) És possible fer una disposició quadrada si, i només si, $2n+1$ és un quadrat perfecte.

iii) La disposició és única si, i només si, $2n+1$ és producte de dos primers.

3.–Sigui m la massa d'oli que hi ha al bidó en un cert moment. Siguin H l'alçada del bidó, h el nivell de l'oli i $m_0/H=d$ la *densitat lineal* de l'oli en el bidó.

La posició del baricentre quan hi ha una certa massa m d'oli és:

$$c(m)=\frac{M\cdot\dfrac{H}{2}+m\cdot\dfrac{h}{2}}{M+m}=\frac{M\cdot\dfrac{H}{2}+\dfrac{m^2}{2d}}{M+m}=\frac{MH+\dfrac{m^2}{d}}{2(M+m)}$$

Derivem c respecte de m:

$$c'(m)=\frac{\dfrac{2m}{d}(M+m)-\left(MH+\dfrac{m^2}{d}\right)}{2(M+m)^2}=\frac{\dfrac{m^2}{d}+\dfrac{2Mm}{d}-MH}{2(M+m)^2}=$$
$$=\frac{m^2+2Mm-Mm_0}{2d(M+m)^2}$$

Per tal que sigui $c'(m) = 0$ ha de ser

$$m^2 + 2Mm - Mm_0 = 0$$

Resulta:

$$m = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4Mm_0}}{2} = \pm\sqrt{M(M + m_0)} - M$$

La solució positiva, única admissible, és

$$m = \sqrt{M(M + m_0)} - M$$

Observeu que la massa total $M + m$ és la mitjana geomètrica de les masses del dipòsit ple i buit.

Ara podem calcular la posició més baixa del baricentre. Es tracta de calcular $c(m)$ quan $m = \sqrt{M(M + m_0)} - M$:

$$\begin{aligned}
c(m) &= \frac{MH + \dfrac{m^2}{d}}{2(M + m)} = \frac{MHd + m^2}{2d(M + m)} = \frac{MHd + \left(\sqrt{M(M + m_0)} - M\right)^2}{2d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\
&= \frac{Mm_0 + M^2 + Mm_0 - 2M\sqrt{M(M + m_0)} + M^2}{2d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\
&= \frac{M^2 + Mm_0 - M\sqrt{M(M + m_0)}}{d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\
&= \frac{M(M + m_0) - M\sqrt{M(M + m_0)}}{d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\
&= \frac{\sqrt{M(M + m_0)} - M}{d} = \frac{m}{d} = h
\end{aligned}$$

i el baricentre està just sobre la superfície de l'oli.

4.–

a) De $(f^2)' = (f')^2$ resulta $2ff' = (f')^2$. Hi ha dues possibilitats:

i) $f' = 0$ i f és una constant, i

ii) $2f = f'$ i $f(x) = A\,\mathrm{e}^{2x}$.

b) De $(x^n g)' = nx^{n-1}g'$ resulta $nx^{n-1}g + x^n g' = nx^{n-1}g'$, o sigui

$$n + x\,\frac{g'}{g} = n\,\frac{g'}{g} \quad\Rightarrow\quad (n - x)\,\frac{g'}{g} = n \quad\Rightarrow\quad \frac{g'}{g} = \frac{n}{n - x}$$

Per tant,

$$\ln g = -n\ln(n - x) + \ln K = \ln\frac{K}{(n - x)^n}$$

i, finalment,

$$g(x) = \frac{K}{(n - x)^n}$$

5.–

a) Si a_R és el nombre de cares amb R costats i el nombre d'arestes del políedre és A, es té:

$$2A = 3a_3 + 4a_4 + \ldots + na_n$$

que, mòdul 2, dóna:

$$0 \equiv a_3 + a_5 + a_7 + \ldots$$

b) La suma dels angles és

$$S = 180^\circ \cdot (a_3 + 2a_4 + \ldots + (n-2)a_n)$$

i, pel que hem vist a *a)*, el nombre entre parèntesis és parell

6.–Hi ha un nombre finit de rectes que passen per dos dels punts. Escollim una recta r que no sigui paral·lela a cap d'elles i tal que tots els punts caiguin en el mateix costat de r.

En desplaçar r paral·lelament a si mateixa, trobarem els punts d'un en un. Si els numerem segons els va trobant la recta desplaçada, els triangles

$$\triangle P_1P_2P_3, \triangle P_4P_5P_6, \ldots \triangle P_{1996}P_{1997}P_{1998}$$

són disjunts.

7.–Sigui ABC un triangle que compleix les condicions del problema. Siguin a la hipotenusa i b i c els catets.

Els punts de tangència de le circumferència amb els catets b i c els divideixen, respectivament, en segments de longitud 6 i $b-6$, i 6 i $c-6$. Però com que les tangents tirades a un cercle des d'un punt són iguals, la hipotenusa a queda dividida pel punt de tangència amb la circumferència en segments de longitud $b-6$ i $c-6$. Això i el teorema de **Pitàgoras** donen les equacions:

$$\begin{aligned} a &= b + c - 12 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Tenim:

$$(b + c - 12)^2 = b^2 + 2bc - 24b + c^2 - 24c + 144 = b^2 + c^2$$

o sigui

$$bc - 12b - 12c + 72 = 0$$

i, després d'algunes manipulacions,

$$b = 12 + \frac{72}{c - 12}$$

Si c és enter, b ho és (i també a) si $c - 12|72$. Com que la construcció geomètrica obliga a que $c > 12$ i els divisors positius de 72 són

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$$

obtenim els possibles valors de c:

$$13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 30, 36, 48, 84$$

Els triangles que compleixen la condició tenen, doncs, costats de longituds:

$$[85, 84, 13]\,, \quad [50, 48, 14]\,, \quad [39, 36, 15]$$

$$[34, 30, 16]\,, \quad [30, 24, 18]\,, \quad [29, 21, 20]$$

8.–Com que $4 \times 9^2 = 324$ i 324 té tres xifres, és clar que els nombres buscats han de tenir menys de quatre xifres.

Sigui $N = 100x + 10y + z$ un d'aquests nombres. Ha de ser:

$$100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2\,; \quad 0 < x < 10\,; \quad 0 \le y < 10\,; \quad 0 \le z < 10$$

Podem escriure

$$x(100 - x) + y(10 - y) = z(z - 1)$$

però el valor *mínim* de $x(100 - x)$ és 99 (per a $x = 1$), mentre que el valor *màxim* de $z(z - 1)$ és 72 (per a $z = 9$), cosa que implica que, en tot cas, $x = 0$ i el nombre no pot tenir tres xifres. La cosa queda en:

$$y(10 - y) = z(z - 1)\,; \quad 0 < y < 10\,; \quad 0 \le z < 10$$

i càlculs simples de totes les possibilitats mostren l'absència de solucions. Per tant, els nombres demanats només poden ser d'una sola xifra i, òbviament, són 0 i 1.