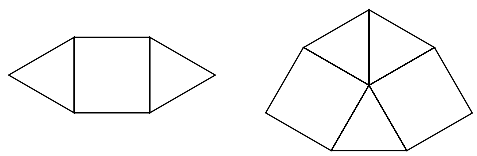
XXXV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

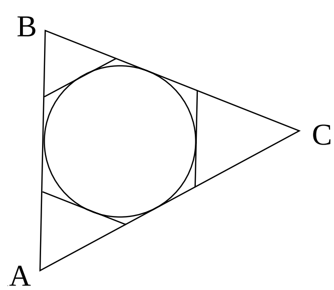
10 de desembre de 1999, de 16 a 20h.

1.–Amb quadrats i triangles equilàters de costat unitat es poden construir polígons convexos. Per exemple, es poden unir dos triangles i un quadrat per a formar un hexàgon, i tres triangles i dos quadrats per a formar un heptàgon, com es mostra al dibuix (la regió tancada pel polígon ha d'estar recoberta exactament pels quadrats i triangles utilitzats).



Quin és el nombre màxim de costats d'un polígon convex que es pot construir amb aquest mètode?

2.–En un triangle, el radi de la circumferència circumscrita és R. Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtexs del triangle com es veu a la figura.



Si els radis de les circumferències circumscrites dels tres triangles petits són R_A, R_B i R_C, demostreu que

$$R = R_A + R_B + R_C.$$

3.–Un professor de matemàtiques va escriure a la pissarra el polinomi quadràtic $x^2+10x+20$. Llavors cada alumne havia d'augmentar o disminuir en 1 o bé el terme constant o bé el terme lineal. Finalment va quedar escrit a la pissarra el polinomi $x^2+20x+10$. Hi va haver en algun moment escrit a la pissarra un polinomi quadràtic amb zeros enters?

4.–Tenim una calculadora que no funciona gaire bé. Només funcionen les tecles: $\boxed{+}$ (suma), $\boxed{-}$ (resta), $\boxed{1/x}$ (invers). Com podem calcular el producte de dos nombres reals amb aquesta calculadora?

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 de desembre de 1999, de 9 a 13h.

5.–Un tetràedre compleix que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles diedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els diedres d'arestes oposades són iguals.

6.–

i) Si n és un nombre natural i 2^{n+12} i 2^n denoten la mesura d'un angle expressada en graus, demostreu que

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

ii) Trobeu el valor més petit de n per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible.

7.–En el pla tenim n rectes de les quals no n'hi ha tres que passin per un mateix punt. Aquestes rectes es tallen en 1999 punts.

i) Determineu el màxim i el mínim de n.

ii) Determineu els valors de n més grans que 500.

8.–

i) Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests nombres és mínima quan els nombres són iguals.

ii) Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$

a l'interval $0 < x < \pi$.

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

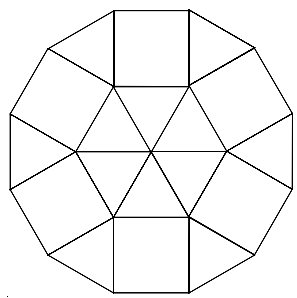
Primera fase (Catalunya)

10 i 11 de desembre de 1999.

Solucions:

1.–Els angles en els vèrtexs d'un polígon convex són tots menors que 180°. Com que els angles d'un triangle equilàter valen 60°, els possibles angles de la figura són 60°, 90°, 120° o 150°. Així doncs, cada angle exterior ha de ser com a mínim 30°. Com que els angles exteriors han de sumar 360°, el nombre de costats pot ser com a màxim $360°/30 = 12$.

Es pot construir un polígon de 12 costats així:

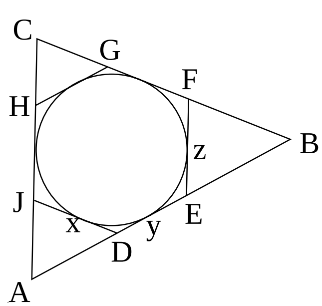


2.–(Veure figura) $DX = DY$, $EY = EZ$, etc, de manera que obrint els costats interiors dels triangles petits recobrim tot el perímetre del gros, d'on $p(ADJ) + p(BEF) + p(CGH) = p(ABC) =: p$. Com que

$$\begin{array}{lll} \triangle ADJ \sim \triangle ABC & \text{amb raó de semblança} & r_1, \\ \triangle EBF \sim \triangle ABC & \text{amb raó de semblança} & r_2, \\ \triangle HGC \sim \triangle ABC & \text{amb raó de semblança} & r_3, \end{array}$$

tenim

$$\begin{aligned} r_1p + r_2p + r_3p = p &\Longrightarrow r_1 + r_2 + r_3 = 1 \\ &\Longrightarrow r_1R + r_2R + r_3R = R \\ &\Longrightarrow R_A + R_B + R_C = R. \end{aligned}$$



3.–Totes les equacions escrites tenien la forma $x^2 + ax + b$ i cada operació realitzada pels alumnes canviava el valor de $a - b$ en 1.

En començar $a-b=-10$ i en acabar $a-b=10$. Per tant en algún lloc del procés $a-b=1$, i tenim el polinomi quadràtic $x^2+(b+1)x+b$ que té com a zeros -1 i $-b$.

4.–Tenim

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}.$$

Per tant

$$\frac{x^2}{2}=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}+0.5,$$

i

$$xy=\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}.$$

5.–Sigui α_{ik} l'angle diedre de l'aresta A_iA_k ($\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$) i $x_{ik}=\cos\alpha_{ik}$. Tenim

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{12}+x_{13}+x_{14} & = & 1 \\ x_{12}+x_{23}+x_{24} & = & 1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{34} & = & 1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Sumant, $2(x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}+x_{34})=4$, i d'aquí $x_{23}+x_{24}+x_{34}=1$. Que junt amb $x_{12}+x_{23}+x_{24}=1$ dóna $x_{12}=x_{34}$, amb $x_{14}+x_{24}+x_{34}=1$ dóna $x_{14}=x_{23}$ i amb $x_{13}+x_{23}+x_{34}=1$ dóna $x_{13}=x_{24}$. D'on resulta $\alpha_{12}=\alpha_{34}$, $\alpha_{14}=\alpha_{23}$ i $\alpha_{13}=\alpha_{24}$.

6.–

i) Tenim

$$\sin(2^{n+12})=\sin(4096\cdot 2^n)=\sin((11\cdot 360+136)\cdot 2^n)=\sin(136\cdot 2^n).$$

Aleshores $\sin(136\cdot 2^n)=\sin(2^n)$ si $136\cdot 2^n=2^n+k\cdot 360$ o bé $136\cdot 2^n=180-2^n+k\cdot 360$, és a dir, $135\cdot 2^n=k\cdot 360 \Leftrightarrow 2^n=k\frac{360}{135}=k\frac{8}{3}$ o bé $137\cdot 2^n=k\cdot 360 \Leftrightarrow 2^n=k\cdot\frac{360}{137}$. El segon cas és impossible, i el primer es verifica si $k=3,2\cdot 3,2^2\cdot 3,\ldots$

Si $k=3$, $2^n=8 \Rightarrow n=3$, i per tant

$$\sin(2^{n+12})=\sin(2^n)\quad \text{si}\quad n\geq 3$$

ii) Per **6.***i*, només hem de considerar $\sin(2^n)$ per a $n=1,\ldots,14$. De la següent taula,

n	2^n	$\sin(2^n)$
1	2	$\sin(2)$
2	4	$\sin(4)$
3	8	$\sin(8)$
4	16	$\sin(16)$
5	32	$\sin(32)$
6	64	$\sin(64)$
7	128	$\sin(52)$
8	256	–
9	512	$\sin(28)$
10	1024	–
11	2048	–
12	4096	$\sin(44)$
13	8192	–
14	16384	–

on $-$ indica que el corresponent sinus és negatiu, es dedueix que el valor més petit de n que fa $\sin(2^n)$ màxim és $n = 6$.

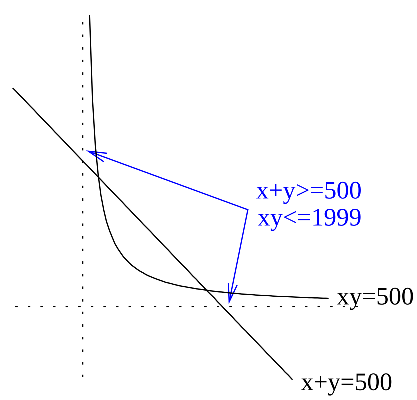
7.–

i) n rectes del pla es tallen en $\binom{n}{2}$ punts o menys, per tant $\binom{n}{2} \geq 1999$ d'on resulta $n \geq 64$. $\binom{64}{2} = 2016$, o sigui que hi ha 17 punts de més, que hem de disminuir fent que algunes rectes siguin paral·leles. Hi ha diverses maneres d'aconseguir-ho, p.e. fent que un grup de 6 siguin paral·leles entre elles, un altre grup de 2 també i un altre de 2 també. Així eliminem $\binom{6}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 17$ punts. Per tant $n \geq 64$.

El mínim nombre de punts en que es tallen n rectes (deixant de banda que no es tallin en cap) és $n-1$ ($n-1$ rectes paral·leles i una altra que les talla totes), d'on $n - 1 \leq 1999$. Per tant $n \leq 2000$.

ii) Suposem que hi ha x rectes paral·leles (prenem x màxim sota aquesta condició) i y que no són paral·leles a cap de les primeres. Tindrem les condicions $x + y \geq 500$, $xy \leq 1999$.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 500 \\ xy &= 1999 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = 250 \pm \sqrt{60501} = 495.97,\ 4.03.$$



Si fos $x < y$ tindríem $x \leq 4$ i no hi hauria més de 4 rectes paral·leles entre elles. Per tant podríem prendre $\frac{500}{4} = 125$ rectes no paral·leles 2 a 2, que donarien $\binom{125}{2} > 1999$ punts de tall.

Per tant $x \geq y$, llavors $y \leq 4$.

Tenint en compte que el nombre de punts de tall és igual a xy més el nombre de punts en que les rectes y es tallin entre elles, podem classificar segons els valors de y.

- Si $y = 1$, $xy = 1999$ i com $x = n - y = n - 1$ tenim $n = 2000$, que és el màxim que hem trobat abans.
- Si $y = 2$ tindrem
  - $2(n-2) = 1999$ si les rectes y són paral·leles,
  - $2(n-2) = 1998$ si les rectes y es tallen.

En el primer cas no hi ha solució, i el segon dóna $n = 1001$.

- Si $y = 3$ tindrem
  - $3(n-3) = 1999$ si les rectes y són paral·leles,
  - $3(n-3) = 1999 - 2$ si dues de les rectes y es tallen,
  - $3(n-3) = 1999 - 3$ si les rectes y es tallen totes.

  En cap dels tres casos hi ha solució.
- Si $y = 4$ tindrem
  - $4(n-4) = 1999$ si les rectes y són paral·leles,
  - $4(n-4) = 1999 - 3$ si 3 de les rectes y són paral·leles,
  - $4(n-4) = 1999 - 4$ si hi ha 2 grups de 2 rectes paral·leles,
  - $4(n-4) = 1999 - 5$ si només 2 de les rectes y són paral·leles
  - $4(n-4) = 1999 - 6$ si totes les rectes y es tallen.

  Dels 4 casos anteriors, només el $4(n-4) = 1999 - 3$ té solució, i dóna $n = 503$.

8.–

i) Rutinari (es veu directament sobre una figura com la del problema **7***b*).

ii) Prenent $u = 9x \sin x$ i $v = 4/(x \sin x)$, com que $u, v > 0$ en $0 < x < \pi$ i $uv = 36$, $f = u + v$ serà mínima quan $u = v = 6$.

$$u = v \Longleftrightarrow 9x \sin x = \frac{4}{x \sin x} \Longleftrightarrow x^2 \sin^2 x = \frac{4}{9}.$$

Aquest valor és possible a $0 < x < \pi$, perquè per a $g(x) = x^2 \sin^2 x$ tenim $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = \pi^2/4$ i $0 < 4/9 < \pi^2/4$. Aleshores el valor mínim de $f(x)$ a $0 < x < \pi$ és 12.