XXXVII Olimpíada Matemàtica Espanyola

Múrcia/Cartagena, 23 i 24 de març de 2001.

1.–Medalles obtingudes pels participants de Catalunya:

1.1.–Medalles d'or:

- **Martí Prats Soler** de 2n de Batx. de l'IES Montserrat, Barcelona. (2n lloc)
- **Sergio Millán López** de 1r de Batx. de l'IES Santa Eulàlia, L'Hospitalet de Llobregat. (4rt lloc)
- **Miquel Oliu Barton** de 2n de Batx. d'Aula Escola Europea, Barcelona (6è lloc)

1.2.–Medalles de plata:

- **Joaquim Cevallos Morales** de 2n de Batx. d'Aula Escola Europea, Barcelona.
- **Francesc Fité Naya** de 2n de Batx. de l'Escola Joan Pelegrí, Barcelona.

1.3.–Medalles de bronze:

- **Roc Maymó Camps** de 2n de Batx. de l'Institució Cultural del CIC, Barcelona.
- **Maria Saumell Mendiola** de 2n de Batxillerat de l'IES Lluís de Requesens, Molins de Rei.

Atès que aquest any el guanyador núm. 1 no té la nacionalitat espanyola, l'equip que participarà a l'Olimpíada Internacional que tindrá lloc a Washington, DC, Estats Units d'Amèrica, el propers dies 2 a 13 de juliol, estarà format pels 4 concursants catalans **Martí Prats**, **Sergio Millán**, **Miquel Oliu** i **Joaquim Cevallos**, juntament amb **Luis Hernández Corbato** (Madrid) i **Ignacio Cascudo Pueyo** (Oviedo).

2.–Les proves:

2.1.–Primera sessió: (Múrcia, 23 de març de 2001)

1. Probar que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto $A(a, b)$ si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que:

$$P(x) = b + (x-a)\,Q\left((x-a)^2\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP cumple

$$AP = BP$$

Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BQC y CRA, ambos semejantes al triángulo ABP cumpliendo

$$BQ = QC \quad \text{y} \quad CR = RA.$$

Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

3. Se tienen cinco segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.
Demostrar que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

2.2.– Segona sessió: (Los Narejos, 24 de març de 2001)

4. Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3×3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba a abajo. ¿Hay alguna disposición para la cual el valor de esa suma sea 2001 ?

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita.
Probar que $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$.

6. Determinar la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (siendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera $s, n \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones:
a) $f(1) = 1$, $f(2^s) = 1$.
b) Si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \leq 2001$.
Hallar el menor número natural n tal que $f(n) = 2001$.