XLII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 i 17 de desembre de 2005

Enunciats

XLII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 de desembre de 2005, de 16 a 19:30h.

1.–Es defineixen les funcions $\lfloor\star\rfloor$ (*part entera inferior*) i $\lceil\star\rceil$ (*part entera superior*) de la següent manera:

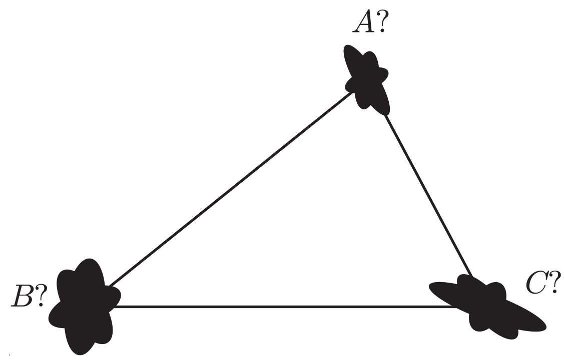
- si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k \leq x < k+1$, llavors $\lfloor x \rfloor = k$;
- si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k-1 < x \leq k$, llavors $\lceil x \rceil = k$.

Demostreu que per a tot $m, n \in \mathbb{Z}$, amb $n \neq 0$ es compleix

$$\left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor = \left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil \quad \text{o} \quad \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lceil \frac{m}{n} - 1 \right\rceil,$$

depenent del signe de n.

2.–Un triangle té els vèrtexs tacats de tinta, de forma que no es pot dibuixar sobre les taques. Explica com trobaries una mitjana, una mediatriu, una bisectriu i una altura emprant regle i compàs.



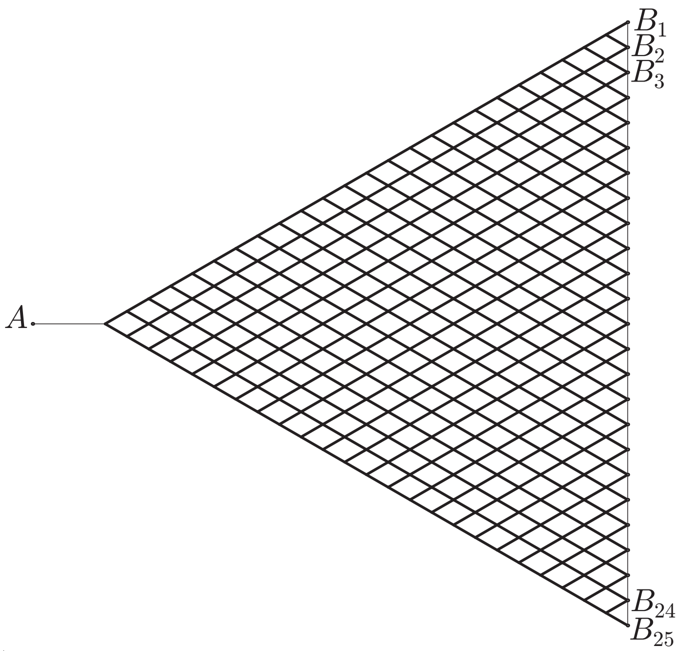
3.–Proveu que l'únic triangle – sigui del tipus que sigui – amb els costats enters i tal que l'àrea coincideix amb el semiperímetre, és el de costats 3, 4 i 5.

XL OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

17 de desembre de 2005, de 9:30 a 13h.

4.–Tenim un enreixat de túnels com el de la figura. Des del punt A surten al mateix temps i cap a la dreta entre 16 i 17 milions de formigues (costa molt comptar-les exactament). Observem, però, una cosa molt curiosa: cada cop que arriben a una bifurcació, la meitat de les que hi arriben (ni una més, ni una menys) se'n van cap a la dreta, i l'altra meitat cap a l'esquerra. Podem saber quantes formigues han sortit exactament del punt A i quantes formigues arribaran als punts B_1, B_2,$\ldots B_{24}$, B_{25}? Cal que demostreu la validesa de les vostres respostes.



5.–Trobeu una fórmula per calcular la suma

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)\,n.$$

6.–Donades tres rectes paral·leles qualssevol, construïu un rombe que tingui un vèrtex sobre cada recta (sobre el quart vèrtex no imposem cap condició), de manera que l'angle corresponent al vèrtex que està sobre la recta del mig sigui de $\pi/4$ radians.

Solucions

Problema 1. *Es defineixen les funcions $\lfloor \star \rfloor$ (part entera inferior) i $\lceil \star \rceil$ (part entera superior) de la següent manera:*

- *si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k \leq x < k+1$, llavors $\lfloor x \rfloor = k$;*
- *si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k-1 < x \leq k$, llavors $\lceil x \rceil = k$.*

Demostreu que per a tot $m, n \in \mathbb{Z}$, amb $n \neq 0$ es compleix

$$\left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor = \left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil \quad o \quad \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lceil \frac{m}{n} - 1 \right\rceil,$$

depenent del signe de n.

Solució.

Per a $n > 0$, sigui $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \leq \frac{m}{n} < p+1$. Per tant, $pn \leq m < (p+1)n$ i com que en aquesta desigualtat tots els nombres són enters també es compleix forçosament que $pn \leq m < m+1 \leq (p+1)n$. En conseqüència $p \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq p+1$. Llavors, $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = p$ i $\left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil = p+1$. És a dir,

$$\left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor.$$

Per a $n < 0$, amb un raonament similar a l'anterior, sigui $p \in \mathbb{Z}$ tal que $(p+1)n \leq m < m+1 \leq pn$. Dividint aquestes desigualtats per n (recordeu que n és negatiu), ens queda

$$p+1 \geq \frac{m}{n} > \frac{m+1}{n} \geq p.$$

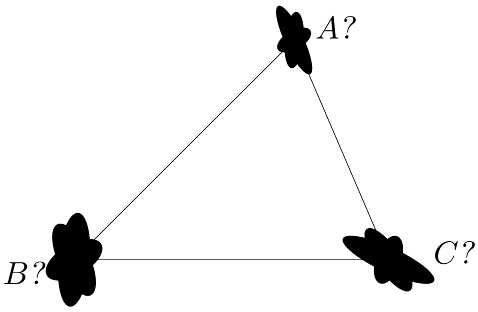
Amb això,

$$\left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = p \quad \text{i} \quad \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = p+1.$$

Llavors,

$$\left\lceil \frac{m}{n} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 = p = \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor.$$

Problema 2. *Un triangle té els vèrtexs tacats de tinta, de forma que no es pot dibuixar sobre les taques. Explica com trobaries una mitjana, una mediatriu, una bisectriu i una altura emprant regle i compàs.*



Primera solució.

Construcció de la mitjana i de la mediatriu (Fig. 1).

Tracem dues paral·leles qualssevol al costat BC i trobem els punts mitjans M i N dels segments que determinen amb el triangle. La recta MN és la mitjana per A. Aquesta recta talla el costat BC al punt P. La perpendicular a BC pel punt P és la mediatriu del costat BC.

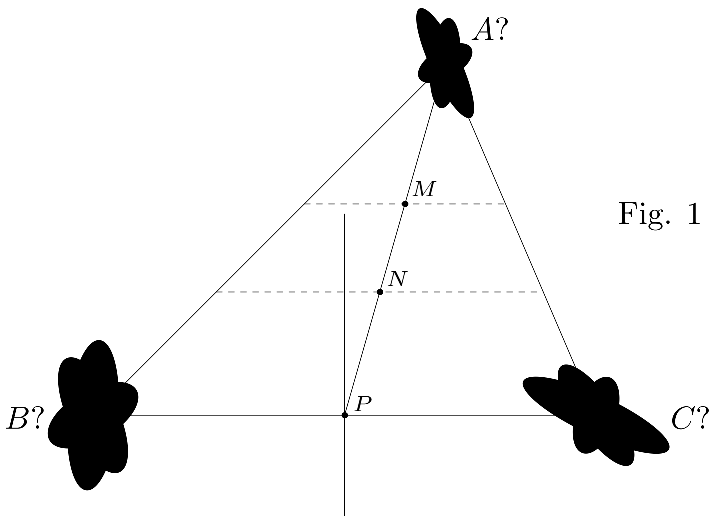


Fig. 1

Construcció de la bisectriu (Fig. 2).

Tracem una paral·lela r a AB per un punt P qualsevol del costat AC. Aquesta paral·lela talla BC en el punt Q. Tracem la bisectriu s del l'angle $\widehat{QPC}$ i després la perpendicular t a s per P. Aquesta perpendicular talla AB en el punt R. La mediatriu de PR és la bisectriu de l'angle A.

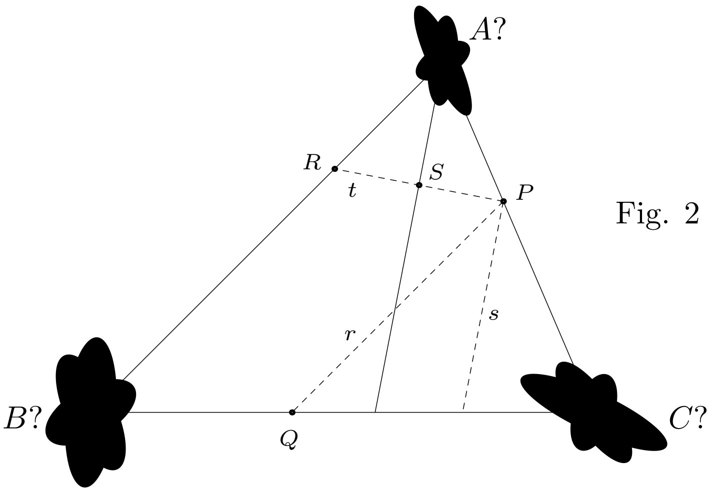


Fig. 2

Construcció de l'altura (Fig. 3).

Per tal de construir l'altura trobem el punt mitjà M del costat AB (peu de la mitjana per C). Tracem una paral·lela a AC per M. Aquesta recta talla el costat BC a N. A continuació tracem l'altura del triangle BMN (segment MH) i la perpendicular HQ a MN. Finalment tracem una paral·lela a AC que estigui a distància $2 \cdot HQ$ d'aquest costat. Aquesta paral·lela tallarà BC en un punt H'. Aquest és el peu de l'altura del triangle ABC per A.

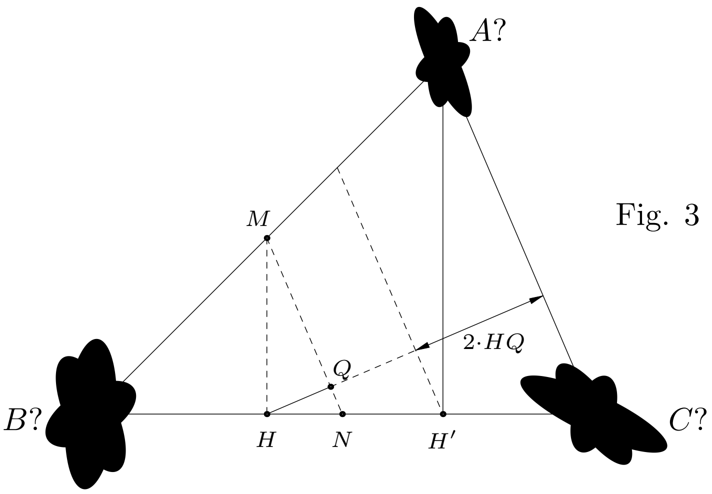


Fig. 3

Segona solució.

Es pot fer un desplaçament qualsevol dels costats del triangle, per exemple, una translació, un gir o una simetria, fer les construccions al triangle desplaçat, i després fer la transformació inversa.

Tercera solució (Marc Viñals).

Tracem paral·leles als costats del triangle a una mateixa distància de cadascun. Les tracem totes tres cap a l'interior del triangle (Fig. 4), o bé totes tres cap a l'exterior del triangle. Obtenim un nou triangle $A'B'C'$. Les bisectrius d'aquest segon triangle coincideixen amb les del primer per la propietat que tenen els punts de la bisectriu d'un angle d'equidistar dels costats.

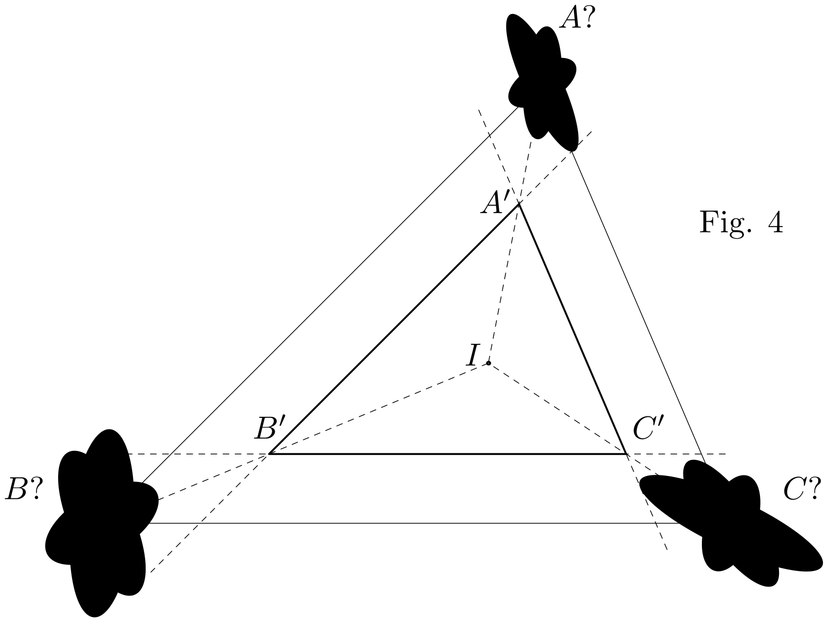


Fig. 4

L'incentre I, comú als dos triangles, també és el centre de l'homotècia que passa del triangle $A'B'C'$ al ABC.

Les línies del triangle $A'B'C'$ (mitjana, mediatriu i altura) es transformen per aquesta homotècia a les corresponents del triangle ABC.

Problema 3. *Proveu que l'únic triangle – sigui del tipus que sigui – amb els costats enters i tal que l'àrea coincideix amb el semiperímetre, és el de costats 3, 4 i 5.*

Solució.
Si A és l'àrea, a, b, c són els costats i el semiperímetres és p, la fórmula d'Heró

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

i la condició de l'enunciat $A = p$ donen l'equació

$$(p-a)(p-b)(p-c) = p.$$

Posem, per simplificar, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$ i obtenim les equacions

$$x + y + z = p \quad \text{i} \quad xyz = p.$$

Per tant ha de ser $x + y + z = xyz$, o bé

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = 1 \quad \text{o bé} \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1$$

si posem $u = yz$, $v = zx$, $w = xy$, que són tres nombres naturals.
Suposem $u \leq v \leq w$, s'obtenen les fites següents:

$$\frac{3}{w} \leq 1 \leq \frac{3}{u} \quad \text{d'on} \quad w \geq 3 \quad \text{i} \quad u \leq 3.$$

A partir d'aquí es destrien sense gaire dificultat tots els casos que porten a l'única solució

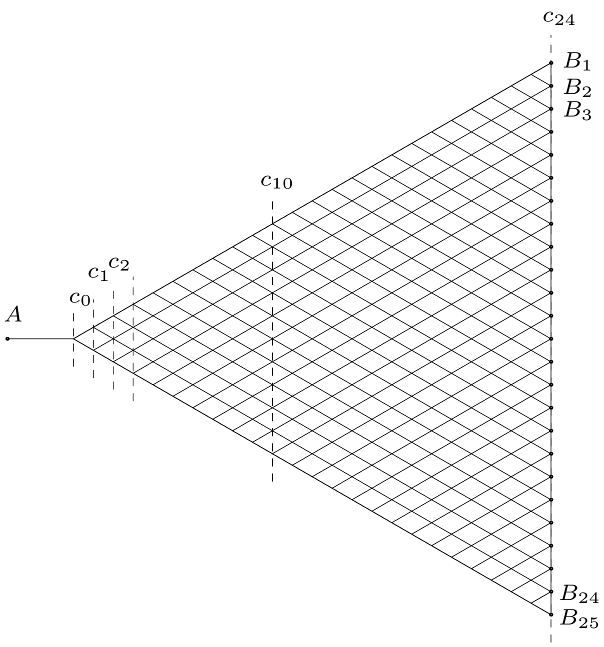
$$a = 3, \; b = 4, \; c = 5.$$

Efectivament, u només pot valer 1, 2 o 3 i tenim, doncs, els casos següents:
- $u = 1$, d'on $1/v + 1/w = 0$, que és impossible.
- $u = 2$, i $1/v + 1/w = 1/2$, i com que $v \leq w$, serà $2/w \leq 1/2 \leq 2/v$, amb la qual cosa ha de ser $w \geq 4$ i $v \leq 4$. Això ens dóna dos conjunts de solucions: $u = 2$, $v = 3$ i $w = 6$; i $v = 2$, $v = 4$ i $w = 4$. (Els casos $v = 1$ i $v = 2$ surten impossibles).
- $u = 3$ i $1/v + 1/w = 2/3$, i com que $v \leq w$, serà $2/w \leq 2/3 \leq 2/v$, amb la qual cosa ha de ser $w \geq 3$ i $v \leq 3$. Això ens dóna també dos conjunts de solucions: $u = 3$, $v = 2$ i $w = 6$, que és impossible ja que $u \leq v$; i $v = 3$, $v = 3$ i $w = 3$.

Les soluciones $u = 2$, $v = 4$, $w = 3$; i $u = 3$, $v = 3$ donen resultats impossibles per a x, y, z. En definitiva, només és bona la solució $u = 2$, $v = 3$, $w = 6$, que porta a $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, o bé $a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$.

Problema 4. *Tenim un enreixat de túnels com el de la figura. Des del punt A surten al mateix temps i cap a la dreta entre 16 i 17 milions de formigues (costa molt comptar-les exactament). Observem, però, una cosa molt curiosa: cada cop que arriben a una bifurcació, la meitat de les que hi arriben (ni una més, ni una menys) se'n van cap a la dreta, i l'altra meitat cap a l'esquerra. Podem saber quantes formigues han sortit exactament del punt A i quantes formigues arribaran als punts B_1, B_2, ... B_{24}, B_{25}? Cal que demostreu la validesa de les vostres respostes.*

Solució.



Si N és el nombre de de formigues, hem de poder fer 24 divisions per 2 (una per cada cruïlla). Això només serà possible si el factor 2^{24} forma part de la descomposició de N. Però $2^{24} = 16\,777\,216$ i aquest és l'únic nombre amb factor 2^{24} entre 16 i 17 milions (el següent nombre amb factor 2^{24} és $2^{25} = 33\,554\,432$). Això ens dóna el nombre exacte de formigues.
Observem com es reparteixen al principi. A la columna c_0 de la figura (punt A) hi ha 2^{24} formigues. A la columna c_1 hi ha 2^{23}, 2^{23} formigues. A la columna c_2 n'hi ha 2^{22}, $2 \cdot 2^{22}$, 2^{22}. A la següent, c_3 són 2^{21}, $3 \cdot 2^{21}$, $3 \cdot 2^{21}$, 2^{21}.

Això ens fa pensar que a la columna c_i hi ha

$$2^{24-i}\binom{i}{0}, 2^{24-i}\binom{i}{1}, 2^{24-i}\binom{i}{2}, \ldots, 2^{24-i}\binom{i}{i-1}, 2^{24-i}\binom{i}{i}.$$

Podem demostrar-ho per inducció. En efecte, a cada punt de la malla hi ha la meitat de la suma dels dos immediats de l'esquerra, si el punt és interior, i la meitat del que té a l'esquerra si el punt és a la vora. Però, això només ho compleixen els nombres escrits abans, per les propietats conegudes del triangle aritmètic.
A la columna c_{24} hi haurà

$$\binom{24}{0}, \binom{24}{1}, \binom{24}{2}, \ldots, \binom{24}{23}, \binom{24}{24}.$$

La suma d'aquests nombres és, efectivament, 2^{24}, ja que per la fórmula del binomi,

$$2^{24} = (1+1)^{24} = \binom{24}{0} + \binom{24}{1} + \binom{24}{2} + \cdots + \binom{24}{23} + \binom{24}{24}.$$

Problema 5.- *Trobeu una fórmula per calcular la suma*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)\, n.$$

Primera solució.

Fem algunes proves i càlculs concrets. Si posem $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)\, n$ queden els valors $S_2 = 2$, $S_3 = 8$, $S_4 = 20$, $S_5 = 40$, etc.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
S_n & = & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & + & 4 & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & & & & & & & & + & n. &
\end{array}$$

Cadascuna de les files és la suma dels termes d'una progressió aritmètica.

$$\begin{aligned}
2 + 3 + \cdots + n &= \frac{(n+2)(n-1)}{2} \\
3 + 4 + \cdots + n &= \frac{(n+3)(n-2)}{2} \\
4 + 5 + \cdots + n &= \frac{(n+4)(n-3)}{2} \\
&\vdots \\
n &= \frac{(n+n)\big(n-(n-1)\big)}{2}.
\end{aligned}$$

Sumant aquestes expressions obtenim

$$S_n = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + \frac{(n+3)(n-2)}{2} + \cdots + \frac{(n+n)\big(n-(n-1)\big)}{2},$$

d'on resulta

$$S_n = \frac{(n-1)(n^2+n) - S_n}{2},$$

que, finalment, dóna

$$S_n = \frac{(n-1)(n^2+n)}{3}.$$

Segona solució (Marc Viñals).

Sigui S_n la suma dels n primers termes. Calculem

$$\begin{aligned} S_{n+1} + S_n &= \\ &= \big(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)\big) + \big(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)n\big) = \\ &\qquad\qquad\qquad = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + 2\,n^2, \end{aligned}$$

és a dir,

$$S_{n+1} + S_n = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{3}.$$

Per altra banda $S_n - S_{n+1} = -n(n+1)$.
Sumant les igualtats tenim

$$2S_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{3} - n^2 - n = \frac{2n^3-2n}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad S_n = \frac{n^3-n}{3}.$$

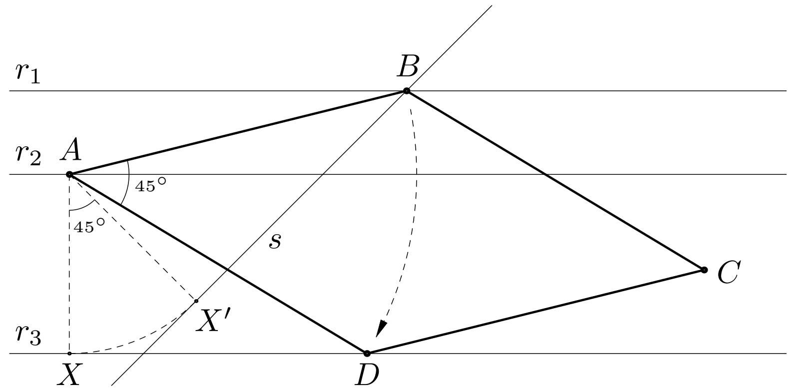
Aquesta fórmula també es pot comprovar per inducció. Pel valor inicial, $n=2$, surt certa $2=2$.
Suposada certa per a n, és

$$S_{n+1} = S_n + n(n+1) = \frac{n^3-n}{3} + n^2 + n = \frac{n^3-n+3n^2+3n+1-1}{3} = \frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}.$$

Problema 6.- *Donades tres rectes paral·leles qualssevol, construïu un rombe que tingui un vèrtex sobre cada recta (sobre el quart vèrtex no imposem cap condició), de manera que l'angle corresponent al vèrtex que està sobre la recta del mig sigui de $\pi/4$ radians.*

Primera solució.

Escollim, com a vèrtex del rombe, un punt qualsevol A sobre la recta del mig r_2. Fem un gir de 45° al voltant del punt A, i la recta r_3 passa a la recta s. La intersecció B de les rectes r_1 i s és un vèrtex B del rombe. El vèrtex D el podem obtenir girant B al voltant de A un angle de $-45°$. Finalment, el punt C és simètric de A respecte de la recta BD.



El gir de 45° de la recta r_3 al voltant de A es pot fer de diverses maneres. La representada a la figura consisteix a buscar el peu X de la perpendicular per A a r_3, girar-lo 45° al voltant de A, obtenint el punt X', i traçant una recta per X' perpendicular a AX'. També es podria fer el gir de la recta triant dos punts arbitraris sobre r_3, girant-los 45° al voltant de A i traçant la recta que uneix aquests dos últims punts.
Observem que el problema admet dues solucions, segons que el gir al voltant de A es faci de 45° o de $-45°$.

Segona solució (Marc Viñals).
Tracem una recta paral·lela equidistant de les rectes exteriors. A partir d'un punt A' qualsevol d'aquesta recta construïm un rombe com el que ens demanen. (El mètode és senzill, només cal dibuixar els dos angles de 45°/2 amb la recta paral·lela mitjana). Obtenim els punts B' i D' vèrtexs d'aquest rombe. Tracem una perpendicular a les tres rectes per A', que talla la recta interior donada en el punt A buscat. El centre del rombe és O, punt mitjà de B' i D'. La perpendicular BD per O a la recta AO dóna finalment el rombe buscat. En efecte, els triangles rectangles $AA'O$ i $DD'O$ són semblants d'on $AO/A'O = DO/D'O$. Els triangles rectangles AOD i $A'OD'$ són també semblants a causa de la igualtat última. D'aquí deduïm que A és el vèrtex buscat. De fet, tots els rombes amb vèrtex sobre la recta AA' tenen angle de 45° i tenen el mateix centre O.