XLIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

15 i 16 de desembre de 2006

Enunciats

XLIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

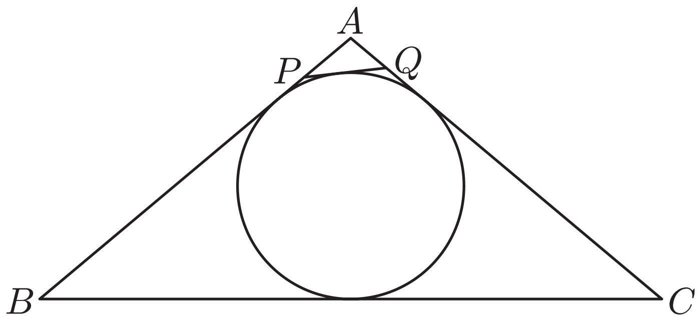
15 de desembre de 2006, de 16 a 19:30h.

1.–Tenim un conjunt de $3n$ enters consecutius. De quantes maneres diferents es poden escollir 3 enters d'aquest conjunt de manera que la seva suma sigui múltiple de 3?

2.–Si a, b, c són els costats d'un triangle de semiperímetre p i àrea S, proveu que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{p}{S}$$

3.–ABC és un triangle isòsceles amb $AB = AC$ i $\widehat{A} = 120°$. P i Q són punts sobre els costats AB i AC, respectivament, tals que PQ és tangent a la circumferència inscrita al triangle. Demostreu que $BP \cdot CQ$ és igual al doble de l'àrea del quadrilàter $PBCQ$.



XLIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 de desembre de 2006, de 9:30 a 13h.

4.–Sigui

$$S = \frac{1\cdot(n-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{2\cdot(n-3)}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{(n-2)\cdot 1}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}$$

Demostreu que $S = \frac{1}{6}$

5.–Una botiga que està oberta els set dies de la setmana ha venut, durant l'any 2005, un total de 629 bicicletes. Sabent que, com a mínim, ha venut una bicicleta cada dia, demostreu que hi ha un periode de dies consecutius durant el qual s'han venut exactament 100 bicicletes.

6.–Sigui a_1, a_2, $\ldots a_n$ una successió finita de nombres reals no tots negatius, i sigui m un nombre enter $0 < m \leq n$. Direm que un terme de la successió, a_k, és un *m-líder* si existeix un enter positiu p $(1 \leq p \leq m)$, tal que

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0.$$

Demostreu que la suma de tots els *m-líders* és sempre no negativa.

Solucions

1.–Posem els $3n$ enters consecutius en la forma $a, a+1, a+2, \ldots, a+3n-1$, per algun enter a. Tres qualssevol sumen $S = 3a + i + j + k$ on i, j, k són tres enters diferents entre 0 i $3n-1$. Per tant, $3|S$ si i només si $3|i+j+k$. Ara bé, $i+j+k$ és múltiple de 3 només en els casos següents:

- $i = 3m$, $j = 3m'$, $k = 3m''$ per certs m, m', m'' enters.
- $i = 3m+1$, $j = 3m'+1$, $k = 3m''+1$ per certs m, m', m'' enters.
- $i = 3m+2$, $j = 3m'+2$, $k = 3m''+2$ per certs m, m', m'' enters.
- $i = 3m$, $j = 3m'+1$, $k = 3m''+2$ per certs m, m', m'' enters.

Tenint present que en el conjunt $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 3n-1\}$ hi ha n enters que són múltiples de 3, n que són de la forma $3m+1$ i n que són de la forma $3m+2$, les tries les podem fer de

$$3\binom{n}{3} + n^3 = \frac{n(3n^2 - 3n + 2)}{2}$$

maneres diferents.

2.–Si $\widehat{C}$ és l'angle oposat al costat c del triangle, podem escriure

$$S = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin \widehat{C} \leq \frac{1}{2}\, a \cdot b$$

D'aquí obtenim

$$\frac{1}{a} \leq \frac{b}{2S}$$

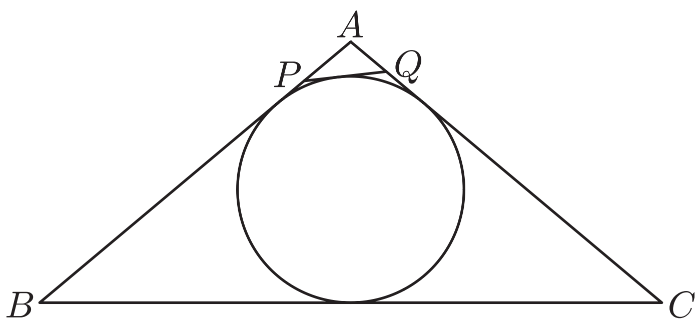
on la igualtat només es dóna si $\widehat{C} = 90°$. De la mateixa manera obtenim

$$\frac{1}{b} \leq \frac{c}{2S} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{c} \leq \frac{a}{2S}$$

Com que les tres igualtats no es poden donar simultàniament tindrem, necessàriament, que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{b+c+a}{2S} = \frac{p}{S}$$

3.–Posem $BP = p$, $CQ = q$, $AB = AC = \ell$ (així $BC = \ell\sqrt{3}$).



Com que $PQ + BC = BP + CQ$ (els segments de tangents a una circumferència traçades des d'un punt exterior són iguals), tindrem que $PQ = p + q - \ell\sqrt{3}$. L'àrea del quadrilàter és:

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(PBCQ) &= \text{Àrea}(ABC) - \text{Àrea}(APQ) = \\ &= \frac{1}{2}\,\ell^2 \cdot \sin 120^\circ - \frac{1}{2}\,(\ell - p)(\ell - q)\sin 120^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\,[(p+q)\cdot \ell - p \cdot q] \end{aligned}$$

Apliquem ara el teorema del cosinus al triangle APQ,

$$(p+q-\ell\sqrt{3})^2 = (\ell-p)^2+(\ell-q)^2-2(\ell-p)(\ell-q)\left(-\frac{1}{2}\right) = (\ell-p)^2+(\ell-q)^2+(\ell-p)(\ell-q).$$

Desenvolupant els quadrats i simplificant:

$$p \cdot q = \ell \cdot (2\sqrt{3} - 3)(p+q).$$

És a dir

$$(p+q)\cdot \ell = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} \cdot p \cdot q.$$

Podem, doncs, escriure,

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(PBCQ) &= \text{Àrea}(ABC) - \text{Àrea}(APQ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\,[(p+q)\cdot \ell - p \cdot q] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3} - 1\right)\cdot p \cdot q = \frac{1}{2}\,p \cdot q = \frac{1}{2}\,BP \cdot CQ. \end{aligned}$$

4.–

4.1.– *Primera solució.*

Aquesta igualtat es pot reescriure com

$$\sum_{j=2}^{n-1}(j-1)(n-j) = \binom{n}{3}.$$

Sabem que $\binom{n}{3}$ és el nombre de maneres d'escollir 3 nombres diferents del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$. Per fer aquesta tria podem seguir la següent estratègia: primer escollim un nombre j tal que $2 \le j \le n-1$; després escollim un nombre $i < j$ (ho podem fer de $j-1$ maneres); i després un nombre $k > j$ (de $n-j$ maneres).

O sigui que fixat un valor de j, $2 \leq j \leq n-1$, el nombre de maneres de triar els altres dos nombres diferents és

$$(j-1) \cdot (n-j).$$

La suma de tots els casos dóna

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1)(n-j).$$

Fent-ho així hem triat una vegada, i només una, tots els conjunts comptats per $\binom{n}{3}$, per tant la igualtat està demostrada.

4.2.– *Segona solució.*

La igualtat proposada és equivalent a

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1) \cdot (n-j) = \binom{n}{3}$$

Ara podem procedir per inducció. Per $n = 3$:

$$\sum_{j=2}^{2} (j-1) \cdot (n-j) = 1 = \binom{n}{3}$$

Si suposem vàlida la suma fins n, és a dir, suposem vàlid que

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1) \cdot (n-j) = 1 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-3) + 3 \cdot (n-4) + \cdots + (n-2) \cdot 1 = \binom{n}{3}$$

Calculem ara

$$\sum_{j=2}^{n} (j-1) \cdot (n+1-j) = 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 1$$

que es pot escriure com

$$\begin{aligned}
&(1 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-3) + \cdots + 1 \cdot 1) + \\
&\qquad + (1 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-3) + 3 \cdot (n-4) + \cdots + (n-2) \cdot 1) = \\
&\frac{n(n-1)}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}
\end{aligned}$$

5.–

5.1.– *Primera solució.*

Numerem els dies de l'any 2005 de l'1 al 365. Sigui b_i el nombre de bicicletes venudes fins el dia i (dia inclòs). Podem escriure:

$$1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_i < \cdots < b_{365} = 629 \tag{1}$$

Sumant 100 a cada terme, obtenim:

$$101 \leq b_1 + 100 < b_2 + 100 < \cdots < b_i + 100 < \cdots < b_{365} + 100 = 729 \tag{2}$$

Entre les dues cadenes de desigualtats tenim un total de $365 \times 2 = 730$ nombres de l'interval $[1, 729]$. Això implica que, com a mínim, dos d'aquests nombres siguin iguals. Els nombres de la cadena de desigualtats (1) són tots diferents. El mateix passa amb els de la cadena (2). Per tant, ha d'haver-hi uns índexs j i k que compleixin $b_k = b_j + 100$. Això vol dir que entre el dia $j+1$ i el dia k (inclòs) s'han venut exactament 100 bicicletes.

5.2.–*Segona solució.*

Sigui b_i el nombre de bicicletes venudes fins al dia i (inclòs). Tots els b_i són diferents. Ens mirem els nombres b_i segons la seva classe de congruència mòdul 100. Com que hi ha 365 dies, hi haurà, almenys, 4 nombres b_i en la mateixa classe.

Suposem que $b_l = b_k + 100a = b_j + 100b = b_i + 100c$ per certs enters $1 \leq a < b < c$. Si $a = 1$ o $b - a = 1$ o $c - b = 1$ ja hem acabat. Si no, com que en total s'han venut 629 bicicletes, l'única possibilitat és que $a = b - a = c - b = 2$ i $b_l = b_i + 600$ amb $b_i \leq 29$. Com que el raonament el podem repetir per a totes les classes de congruència amb almenys 4 elements, deduïm que o bé hem demostrat l'enunciat o bé com a molt hi ha 29 classes de congruència mòdul 100 que continguin almenys quatre dels nombres b_n. Si totes aquestes classes contenen exactament quatre nombres, tindríem que el nombre total de b_n seria $\leq 29 \cdot 4 + 71 \cdot 3 = 329 < 365$. Per tant, hi ha d'haver alguna classe que contingui almenys 5 nombres b_n. Per a aquest tenim $b_l = b_k + 100a = b_j + 100b = b_i + 100c = b_h + 100d$; i ara el mateix argument d'abans ens donaria $b_l \leq 800 + b_h$, que és impossible, per tant algun d'entre $a, b - a, c - b, d - c$ és igual a 1, com voliem demostrar.

6.–Sigui doncs m un enter positiu $0 < m \leq n$. Els termes no negatius de la successió són m-líders per a tot m perquè el p requerit pot ser $p = 1$. Així, el conjunt de m-líders és no buit. Sigui a_k el primer m-líder i sigui

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0, \qquad 0 \leq p \leq m$$

la primera suma (la més curta) que és no negativa. Tots els sumands d'aquesta suma, com per exemple, a_h, són també m-líders. En efecte,

$$a_h + a_{h+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0,$$

perquè si no fos així, $a_k + \cdots + a_{h-1} > 0$ i per tant, la suma positiva més curta no seria de longitud p.

Tenim, doncs, que $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+p-1}$ són tots m-líders i

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0.$$

Considerem ara la successió $a_{k+p}, \dots, a_n$ i repetim el mateix procés i així successivament fins acabar amb la successió original. La suma de *totes* les sumes més curtes que hem anat obtenint és la suma de *tots* els m líders. Òbviament, aquesta suma és no negativa.