XLIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 i 15 de desembre de 2007

Enunciats

XLIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

14 de desembre de 2007, de 16 a 19:30h.

1.–Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ són nombres primers diferents, demostreu que el nombre

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

no pot ser enter.

2.–Sigui ABC un triangle isòsceles de costat desigual BC. Una circumferència és tangent interiorment a la circumferència circumscrita al triangle i als costats AB i AC en els punts P i Q respectivament. Demostreu que el punt mig del segment PQ és l'incentre del triangle ABC.

3.–Tenim tres segments de longitud

$$a^{1/a}, b^{1/b}, c^{1/c}$$

on a, b i c són nombres reals positius més grans o iguals que 1. És sempre possible construir un triangle que els tingui per costats?

XLIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

15 de desembre de 2007, de 10:00 a 13:30h.

4.–Quin és el nombre més gran que es pot obtenir com a producte de nombres enters positius que sumin 2007?

5.–Un alfabet està constituït per tres lletres: I, X, V que s'escriuen amb barretes d'igual mida I. Si tenim n barretes i les utilitzem totes, quantes paraules diferents podrem escriure? I si $n = 12$?

6.–Donades dues rectes concurrents i un punt P exterior a elles, traceu un recta per P tal que la seva intersecció amb les dues rectes formi un triangle de perímetre donat.

Solucions

1.–Suposem que fos enter. Tindríem

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=m.$$

Llavors,

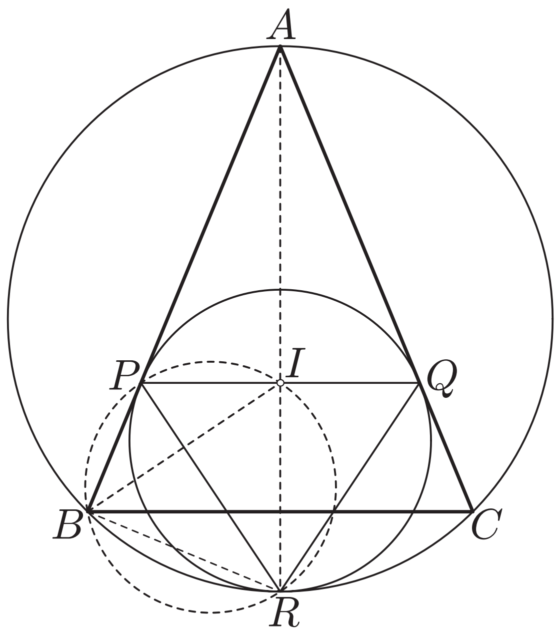
$$\frac{1}{p_1}=m-\left(\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)=\frac{r}{p_2\cdots p_n}$$

i tindríem

$$r\cdot p_1=p_2\cdots p_n \quad\Rightarrow\quad p_1 \mid p_2\cdots p_n$$

que és absurd.

2.–



Sigui c la circumferència tangent interior. Per construcció, el punt mig del segment PQ, que anomenarem I pertany a la bisectriu de l'angle $\widehat{A}$. Anem a demostrar que també és sobre la bisectriu de $\widehat{B}$. En efecte, si R és el punt de tangència entre c i la circumferència circumscrita, R estarà sobre la bisectriu de l'angle $\widehat{A}$. Tenim que

$$\widehat{PRQ}=\widehat{APQ}=\widehat{ABC}.$$

(Respecte la circumferència c, l'angle $\widehat{APQ}$ és un angle semiinscrit que mesura la meitat de l'arc PQ a l'igual que l'angle inscrit $\widehat{PRQ}$.)

Per altra banda, els angles $\widehat{PIR}$ i $\widehat{PBR}$ són rectes; en conseqüència, els punts P, B, R i I són concíclics i pertanyen a la circumferència c' que té centre en el punt mig del segment PR. Els angles $\widehat{PBI}$ i $\widehat{PRI}$ són inscrits a c' i abasten el mateix arc. Això ens permet afirmar que

$$\widehat{PBI} = \widehat{PRI} = \frac{1}{2}\widehat{PRQ} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

El punt I, doncs, pertany també a la bisectriu de l'angle $\widehat{B}$ i és l'incentre del triangle ABC.

3.–Tres nombres reals x_1, x_2, x_3 de l'interval $[1, 2)$ sempre poden ser les longituds dels costats d'un triangle atès que la suma de qualsevol dels dos és més gran que el tercer:

$$x_{i_1} + x_{i_2} \geq 2 > x_{i_3}$$

Els tres nombres de l'enunciat, estan en aquesta situació. En efecte. Clarament, si $x \geq 1$, $x^{1/x} \geq 1$. Per tant, només hem de veure que per tot $x \geq 1$ es compleix $x^{1/x} < 2$ que equival a $x < 2^x$.

Com que $[x] \leq x < x + 1$, fent servir la desigualtat de Bernoulli tenim:

$$2^x \geq 2^{[x]} = (1+1)^{[x]} \geq 1 + [x] > x.$$

4.–Posem que $2007 = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$. Volem aconseguir que $N = s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$ sigui màxim. Podem fer les consideracions següents:

- **Cap sumand** s **pot ser igual a 1**. El cas en què TOTS els $s_i = 1$ correspon clarament a un mínim ($N = 1$). Així, algun s ha de complir $s > 1$. En el cas que algun altre sumand fos 1, substituint s_i i 1 per $s + 1$ aconseguiríem un major valor de N atès que $1 + s > 1 \cdot s$.
- **Cap sumand** s **pot ser** > 4. Si un $s \geq 5$, el podem substituir per 3 i $s - 3$ i el valor resultant de N augmentaria atès que $3 \cdot (s - 3) > s$.
- **Si un dels sumands** $s = 4$**, es pot substituir per dos sumands iguals a 2**.
- **No hi pot haver més de dos sumands iguals a** 2. Tres sumands iguals a 2 es poden substituir per dos sumands iguals a 3 i el valor de N augmenta atès que $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Així, N només pot tenir factors 3 junt amb cap, un o dos factors 2. El fet que $2007 = 3^2 \cdot 223$ fa que el màxim de N es trobi quan fem $2007 = 669 \cdot 3$, o sigui $N_{\text{màx}} = 3^{669}$.

5.–

5.1.–*Primera solució.*

Pels valors baixos de n tenim:

- $n=1$. Només hi ha 1 paraula; I.
- $n=2$. Podem escriure 3 paraules: II,X,V.
- $n=3$. Podem escriure 5 paraules: III, IV, VI, IX, XI
- $n=4$. Podem escriure 11 paraules: IIII, IVV, IVI, VII, VV, VX, IIX, IXI, XII, XX, XV

Sigui P_n el nombre de paraules que podem formar amb n barretes; tenim $P_1=1$, $P_2=3$, $P_3=5$, $P_4=11$, etc. Es compleix que

$$P_n = P_{n-1} + 2P_{n-2}.$$

Efectivament, tota paraula acaba en I, en X o en V. Si acaba en I i esborrem aquesta lletra, aleshores tenim totes les paraules de $n-1$ lletres, que són P_{n-1}. Si acaba en V o en X i esborrem aquestes lletres, aleshores tenim P_{n-2} paraules per les que acaben en V i P_{n-2} per les que acaben en X: en total $2P_{n-2}$. D'aquí surt la recurrència.

Resolent-la pel mètode general, arribem al polinomi característic x^2-x-2 i les seves arrels $x=2$ i $x=-1$. La solució general de la recurrència és $P_n = a2^n + b(-1)^n$. Calculem les constants a i b a partir dels valors de P_1 i P_2 i ens queda $a=2/3$, $b=1/3$. Tenim, finalment,

$$P_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3}.$$

Per $n=12$ queda $P_{12}=2731$.

5.2.– *Segona solució.*

Amb n barretes podem escriure paraules que continguin $n, n-2, n-4, \ldots, 0$ lletres I si n és parell, o bé $n, n-2, n-4, \ldots, 1$ lletres I si n és senar, o sigui, paraules amb $n-2p$ lletres I on $0 \le p \le n/2$ si n és parell, o $0 \le p \le (n-1)/2$ si n és senar.

Una paraula amb $n-2p$ lletres I conté p lletres X o V, i té, per tant, $n-p$ lletres en total. Per tal d'escriure-les totes, caldrà primer triar p llocs entre els $n-p$ on posar les X i V. D'aquestes tries n'hi ha

$$\binom{n-p}{p}$$

A continuació hem d'escriure X o V en aquests llocs, cosa que podem fer de 2^p maneres. Així, doncs, tindrem

$$2^p\binom{n-p}{p}$$

paraules escrites amb n barretes que contenen exactament p lletres I.

El nombre total de paraules que podrem escriure amb n barretes serà

$$P_n = \sum_{p=0}^{n/2} 2^p \binom{n-p}{p}, \quad \text{si } n \text{ és parell,}$$

$$P_n = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} 2^p \binom{n-p}{p}, \quad \text{si } n \text{ és senar.}$$

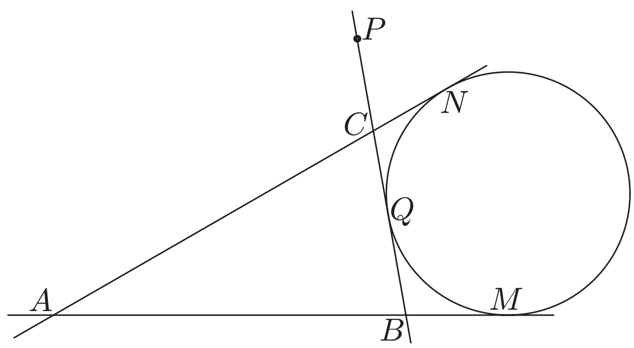
Per $n = 12$ surt

$$P_{12} = 2^0\binom{12}{0}+2^1\binom{12}{1}+2^2\binom{12}{2}+2^3\binom{12}{3}+2^4\binom{12}{4}+2^5\binom{12}{5}+2^6\binom{12}{6} = 2731.$$

5.3.– *Observació.*

La igualtat de les fórmules de les dues solucions es pot demostrar comprovant per mitjà de les propietats additives bàsiques dels nombres combinatoris, que els P_n obtinguts en la solució 2, compleixen la recurrència de la solució 1.

6.–Suposem el problema resolt:



Tracem la circumferència exinscrita al triangle tangent en Q al costat BC. Cada una de les dues tangents exteriors AM i AN (que són iguals per ser les dues tangents a la circumferència des d'un mateix punt) mesura exactament el semiperímetre. En efecte; atès que els segments $BQ = BM$ i $CQ = CN$ (per la mateixa raó d'abans) tenim que $AM = AB+BQ$ i $AN = AC+CQ$. Sumant les dues expressions tenim $AM+AN = 2s$ on s denota el semiperímetre. Per tant, per traçar la recta que ens demanen només cal transportar la meitat del perímetre a AM i AN, dibuixar la circumferència tangent a les dues rectes en M i N i, des de P traçar la recta tangent a la circumferència. La circumferència ha de quedar dibuixada en un dels quadrants contigus al que conté el punt; per tant, de fet, hi ha dues solucions al problema.