XLV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Enunciats i solucions

Problema 1.

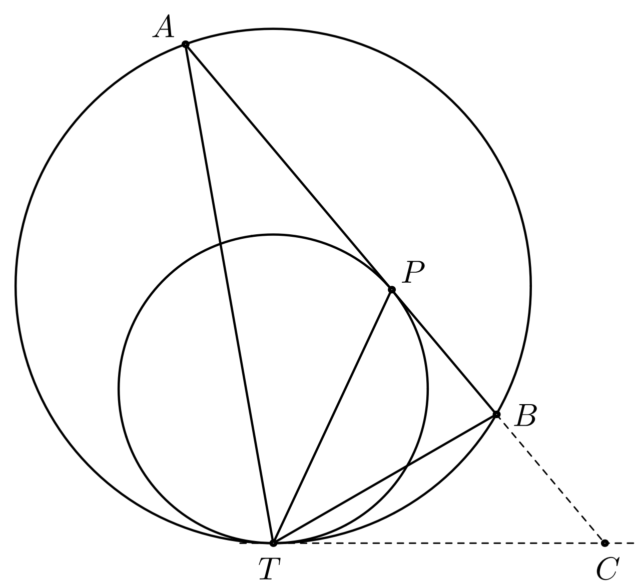
Dues circumferències són tangents interiorment en T. Sigui AB una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior en el punt P. Demostreu que $\overline{TP}$ biseca $\widehat{ATB}$.

Primera solució.

Si dibuixem la tangent comuna a T i anomenem C el punt d'intersecció amb la recta AB, tenim que el triangle PTC és isòsceles atès que $\overline{CP} = \overline{CT}$ per ser tangents a la mateixa circumferència. Així,

$$\widehat{TPC} = \widehat{CTP} = \widehat{CTB} + \widehat{BTP}.$$

Els angles $\widehat{CTB}$ i $\widehat{TAB}$ són iguals perquè abarquen el mateix arc a la circumferència exterior (el primer és semiinscrit i el segon inscrit).



Ara, $\widehat{TPA}$ és suplementari de $\widehat{TPC}$ o sigui que, considerant el triangle ATP, tenim

$$\widehat{TPC} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}.$$

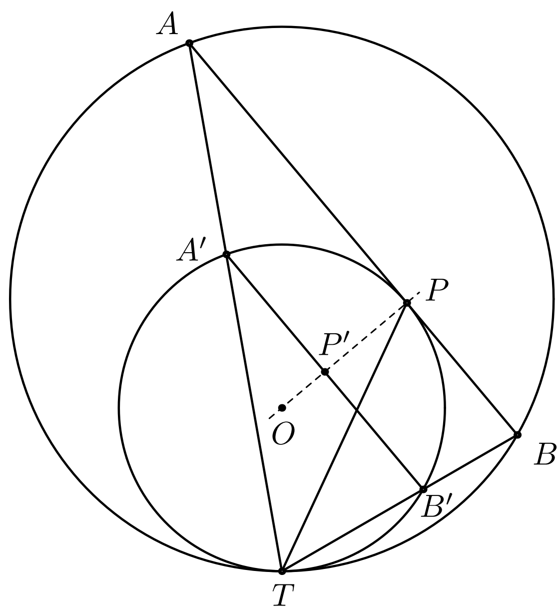
Tenim, doncs, $\widehat{TPC}$ expressat de dues maneres:

$$\widehat{CTB} + \widehat{BTP} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}$$

o sigui que $\widehat{BTP} = \widehat{ATP}$ com s'havia de demostrar.

Segona solució.

L'homotècia de centre T que transforma la circumferència gran en la petita, transforma A en A' i B en B'. Les rectes AB i $A'B'$ són, per tant, paral·leles. Com que el radi OP és perpendicular a la tangent AB, també és perpendicular a $A'B'$. El punt P' ha de ser el punt mitjà de $A'B'$ i la recta OP' és la mediatriu del triangle $TA'B'$ corresponent al costat $A'B'$. Els arcs $A'P$ i PB' són iguals i per tant TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{A'TB'}$, com calia demostrar.



Problema 2.

Caracteritzeu tots els nombres enters positius N que **no** es poden escriure de cap de les dues maneres següents:

$$ab + a + b, \qquad cd + c - d,$$

amb a, b, c, d enters positius tals que $c \geq d$.

Solució.

Considerem un nombre enter positiu qualsevol, N. Suposem que $N = ab + a + b$. Llavors, $N = a(b+1) + b = (a+1)(b+1) - 1$. En conseqüència, $N+1 = (a+1)\cdot(b+1)$ és un nombre compost. Si $N = cd + c - d$, llavors, $N = c(d+1) - d = (c-1)(d+1) + 1$. En conseqüència, $N - 1 = (c-1)\cdot(d+1)$ és un nombre compost, llevat dels casos $c = 2, d = 1$ i $c = 2, d = 2$. El cas $c = 2, d = 1$ correspondria a $N = 3$ pel qual $N + 1 = 4$ és compost i els cas $c = 2, d = 2$ correspondria a $N = 4$ que és la única excepció. En conseqüència, els enters positius N que no són ni d'una manera ni de l'altre són tals que $N + 1$ i $N - 1$ són primers amb l'excepció del 4. Això caracteritza els nombres que ens demanen: són els que estan situats entre dos primers a excepció del 4. És a dir: 6, 12, 18, 30, 42, 60, etc.

Problema 3.

Sigui $\{a_n\}$ la successió en la qual a_n es defineix com el nombre natural més proper a $\sqrt{n}$. Quin és el valor de

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}}?$$

Solució.

Si fem una mica d'observació, tindrem:

$$\begin{array}{rccccccccccccccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ a_n: & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

Ens adonem que a la segona fila, l'1 es repeteix dues vegades, el 2 es repeteix 4 vegades, el 3 es repeteix 6 vegades, el 4 es repeteix 8 vegades. A més, si ens fixem en els quadrats perfectes de la primera fila, veiem que on tenim k^2, el corresponent a_k és, òbviament, k i aquest valor es manté entre els valors $k^2-(k-1)$ i k^2+k. Per tant, podem conjecturar que

$$a_n = k \qquad \text{si, i només si,} \qquad n = k^2-k+1, k^2-k+2, \ldots, k^2+k-1, k^2+k.$$

En total, $a_n = k$ per $2k$ valors de n. Demostrem aquesta conjectura. Si $a_n = k$, això equival a que

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}.$$

Les desigualtats són estrictes perquè $\sqrt{n}$ no pot prendre mai el valor $k+1/2$ amb k enter. Tenim, doncs, elevant al quadrat, que

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Aquestes desigualtats, òbviament porten a que $n = k^2-k+1, k^2-k+2, \ldots, k^2+k-1, k^2+k$.
En conseqüència, un valor k s'aconsegueix $2k$ vegades exactament pels valors de n compresos entre k^2-k+1 i k^2+k. Això significa que la fracció $1/k$ apareix $2k$ vegades. Mirem ara com queda 2008 en relació a la seva posició en una llista $k^2-k+1, k^2-k+2, \ldots, k^2+k-1, k^2+k$. Concretament, com que $\sqrt{2008} = 44.8\ldots$, el valor de a_{2008} serà 45 i serà dins de la llista $45^2-45+1 = 1981, \ldots, 45^2+45 = 2070$. Aquest valor s'haurà assolit exactament per $a_{1981}, a_{1982}, \ldots, a_{2008}$. Exactament 28 vegades. Estem en condicions de fer la suma total:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 88 \cdot \frac{1}{44} + 38 \cdot \frac{1}{45} = 44 \cdot 2 + \frac{28}{45} = \frac{3988}{45}.$$

Problema 4.-

Donat un triangle ABC, siguin m_a, m_b, m_c les seves mitjanes i sigui R el radi de la circumferència circumscrita. Demostreu que

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

és un nombre enter positiu i determineu el seu valor.

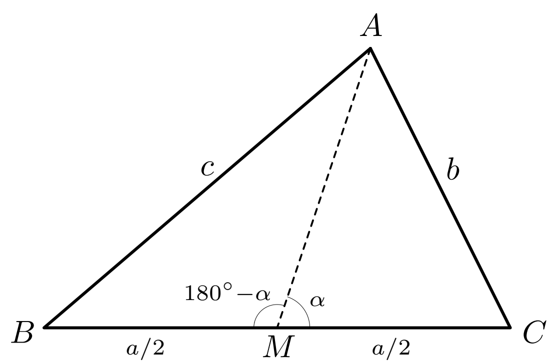
Solució.

El teorema del sinus aplicat al triangle ABC ens dóna

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

i d'aquí surt que el denominador de l'expressió de l'enunciat és $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. Calculem ara les mitjanes. Considerem la mitjana m_a que uneix el vèrtex A amb el punt M mitjà del segment BC. El teorema del cosinus aplicat als triangles AMB i AMC dóna

$$\begin{aligned} c^2 &= m_a^2 + a^2/4 - a\,m_a \cos(180^\circ - \alpha) = m_a^2 + a^2/4 + a\,m_a \cos\alpha, \\ b^2 &= = m_a^2 + a^2/4 - a\,m_a \cos\alpha \end{aligned}$$



Sumant les dues expressions queda $b^2 + c^2 = a^2/2 + 2m_a^2$. Fàcilment obtenim $m_a^2 = (2c^2 + 2b^2 - a^2)/4$ i per tant

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

El nombre que ens demanen és 3.

Problema 5.

És possible construir un políedre amb totes les cares formades per polígons de diferent nombre de costats?

Primera solució.

Suposem que la cara de més gran nombre de costats en té n. Les cares poden ser de 3, 4, 5, ... , $n-1$, n costats. Com a màxim hi ha $n-2$ cares. De cada una de les n arestes de la cara que en té més hi hem de poder posar una cara, però no tenim prou cares ja que , com a màxim, ens en queden $n-3$. Impossible.

Segona solució.

Designem per c, v i a el nombre de cares, vèrtexs i arestes del políedre. Per la fórmula d'Euler sabem que $c+v=a+2$, i com que a cada vèrtex hi concorren, com a mínim, tres arestes, tenim també $3v \leq 2a$. D'aquestes dues relacions surt fàcilment $6 \leq 3c-a$ o bé $12 \leq 6c-2a$.
Designem per c_i el nombre de cares que tenen i costats. Aleshores

$$\begin{aligned} c &= c_3 + c_4 + \cdots + c_n \\ 2a &= 3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n. \end{aligned}$$

Substituint a la fórmula $12 \leq 6c-2a$ els valors de c i $2a$ tenim

$$\begin{aligned} 12 &\leq 6\big(c_3 + c_4 + \cdots + c_n\big) - \big(3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n\big) = \\ &= 3c_3 + 2c_4 + c_5 - \big(c_7 + 2c_8 + \cdots + (n-6)c_n\big) \\ &\leq 3c_3 + 2c_4 + c_5. \end{aligned}$$

Si fos $c_3 \leq 1$, $c_4 \leq 1$ i $c_5 \leq 1$ ens quedaria $12 \leq 6$, absurd. En conseqüència, entre les cares d'un políedre cal que es repeteixin efectivament, o bé triangles, o bé quadrilàters, o bé pentàgons.

Problema 6.-

En el conjunt $\{2, 2^2, \dots, 2^n\}$ (n enter positiu), quina és la probabilitat que, en agafar un nombre a l'atzar del conjunt, la seva expressió decimal comenci amb un 1? Per a un valor gran de n, pots predir el comportament d'aquesta probabilitat?

Primera solució.

Demostrarem per inducció que a cada ordre decimal hi ha almenys una potència de 2 (entenem per ordre decimal cada interval entre dues potències de 10 consecutives).
En efecte, a l'ordre $[1, 10)$ n'hi ha 3: 2, 4 i 8. Suposem que a l'ordre k, $[10^{k-1}, 10^k)$ hi ha alguna potència de 2. Aleshores, si aquesta potència no arriba a la meitat de l'ordre, la potència següent queda dins del mateix ordre ($499\dots99 \times 2 = 999\dots98$). Com que dins d'un ordre decimal no hi pot haver infinites potències de 2, alguna d'elles passarà de la meitat i la potència següent serà de l'ordre següent $k+1$, $[10^k, 10^{k+1})$.
Aquesta potència de dos que acabem de trobar a la demostració anterior comença amb un 1 ($999\dots99 \times 2 = 1999\dots98$). A més és l'única potència de 2 dins de l'ordre decimal que comença amb un 1.
En conclusió a cada ordre decimal hi ha una *única* potència de 2 que comença amb un 1. A la successió $\{2, 2^2, \dots, 2^n\}$ hi ha tantes potències de 2 que comencen amb un 1 com ordres decimals abasti, és a dir, com el nombre de xifres de 2^n que és

$$\left[\log 2^n\right] + 1 = \left[n \log 2\right] + 1.$$

Tenint present que a l'odre decimal 1 no n'hi ha cap ja que $2^0 = 1$ no és del conjunt, la probabilitat buscada és

$$p_n = \frac{\left[n \log 2\right]}{n}.$$

Com que $\left[n \log 2\right] = n \log 2 - \{n \log 2\}$ (on $\{\alpha\}$ indica la *part fraccionària* del nombre real α, $0 < \{\alpha\} < 1$), resulta

$$p_n = \log 2 - \frac{\{n \log 2\}}{n}$$

que tendeix a $\log 2$ quan n es fa gran.

Segona solució.

Una primera observació que hem de fer és que per cada valor enter positiu de k existeix una única potència de 2 de k xifres que comença per 1. Per $k = 1$ és evident: $2^0 = 1$. Per $k > 1$, tot rau a estudiar la doble desigualtat

$$10^{k-1} < 2^r < 2{\cdot}10^{k-1}$$

i veure que té solució única en r. Traient logaritmes decimals,

$$k - 1 < r{\cdot} \log_{10}(2) < k - 1 + \log_{10}(2).$$

Ara, dividint tot per $\log_{10}(2)$:

$$\frac{k-1}{\log_{10}(2)} < r < \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1.$$

Com que $\log_{10}(2)$ no és un nombre racional, a l'interval

$$\left(\frac{k-1}{\log_{10}(2)}, \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1\right)$$

segur que hi ha un únic nombre enter positiu r.
Vist això, comptem quantes potències de 2 del conjunt $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n\}$ comencen per 1. Amb la observació anterior, deduïm que el nostre recompte coincideix amb el nombre de dígits decimals de 2^n. És a dir, $[n \cdot \log_{10}(2)]$ (la notació $[\cdot]$ denota la part entera d'un nombre real). La probabilitat demanada és

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n}.$$

Com que podem escriure $[n \cdot \log_{10}(2)] = n \cdot \log_{10}(2) - \alpha$, on $0 < \alpha < 1$, tenim que

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n} = \frac{n \cdot \log_{10}(2) - \alpha}{n} = \log_{10}(2) - \frac{\alpha}{n}.$$

Si n és gran, com que $0 < \alpha < 1$, és clar que la fracció α/n és molt petita. La probabilitat s'acostarà a $\log_{10}(2) = 0.301030\ldots$.