XLVI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 i 12 de desembre de 2009

Enunciats

XLIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

11 de desembre de 2009, de 16 a 19:30h.

1.–Troba els dos angles desconeguts d'un triangle acutangle donat, sabent que el tercer angle mesura $45°$, i que el producte de dos dels angles del seu triangle òrtic és 2009. (El *triangle òrtic* PQR d'un triangle ABC és aquell que té per vèrtexs els peus de les tres altures del triangle ABC. Els angles es mesuren en graus sexagesimals a l'interval $[0°, 180°]$).

2.–Per a cada nombre natural n, considera l'enter positiu $\overbrace{\underbrace{444\ldots44}_{n}\underbrace{888\ldots889}_{n}}^{2n}$. Demostra que cada un d'ells és un quadrat perfecte i calcula'n l'arrel quadrada.

3.–Troba totes les ternes (x, y, z) de nombres reals que compleixen

$$\left.\begin{aligned} x^2 + \sqrt{y^2+12} &= \sqrt{y^2+60} \\ y^2 + \sqrt{z^2+12} &= \sqrt{z^2+60} \\ z^2 + \sqrt{x^2+12} &= \sqrt{x^2+60} \end{aligned}\right\}$$

XLIV OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

12 de desembre de 2009, de 9:30 a 13:00h.

4.–Dins d'un quadrat es dibuixa un triangle de manera que el centre del quadrat caigui fora del triangle. Prova que un dels costats del triangle té la longitud més petita o igual que la longitud del costat del quadrat.

5.–Siguin a, b i c tres nombres reals i positius tals que $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=9$. Proveu que

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\leq\sqrt{3}.$$

6.–En un triangle ABC, de costats a, b i c, es consideren un punt Q sobre AB i la recta que passa per Q i C. Demostra que la circumferència que té com a diàmetre els incentres I_1 i I_2 dels triangles ACQ i BCQ talla el segment QC en el punt Q i en un altre punt P que dista $p-c$ de C, on p és el semiperímetre del triangle ABC.

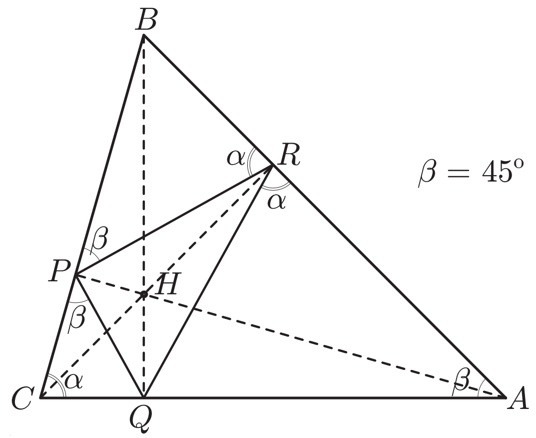
Solucions

1.–Troba els dos angles desconeguts d'un triangle acutangle donat, sabent que el tercer angle mesura 45°, i que el producte de dos dels angles del seu triangle òrtic és 2009. (El *triangle òrtic* PQR d'un triangle ABC és aquell que té per vèrtexs els peus de les tres altures del triangle ABC. Els angles es mesuren en graus sexagesimals a l'interval $[0^\circ, 180^\circ]$).

Solució:

Sigui PQR el triangle òrtic del triangle ABC amb l'ordre alfabètic habitual, en el qual suposarem que l'angle $\widehat{A} = 45^\circ$.

Aleshores podem veure que $\widehat{P} = 180^\circ - 2\widehat{A}$, $\widehat{Q} = 180^\circ - 2\widehat{B}$, i $\widehat{R} = 180^\circ - 2\widehat{C}$. Això és immediat si veiem que $\widehat{BPR} = \widehat{A} = \widehat{CPQ}$ i això es deu a que els triangles PBR i ABC són semblants, i també els triangles AQR i PQC (vegeu la figura adjunta).



Considerem els triangles rectangles BPA i BRC. Per ser rectangles i compartir un angle agut són semblants. D'això se'n deriva

$$\frac{BP}{BA} = \frac{BR}{BC}.$$

Aleshores, pel criteri costat-angle-costat [CAC], els triangles PBR i ABC són semblants. Anàlogament passa amb els altres dos triangles, i així ja tenim provada la primera afirmació.

De tot això en resulta que $\widehat{P} = 180^\circ - 2\widehat{A} = 90^\circ$.

Ara analitzem els tres casos possibles:

- Si $\widehat{P} \times \widehat{R} = 2009$, $\widehat{R} = \frac{2009}{90}$, i $\widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{R}}{2} = 78^\circ 50' 20''$, $\widehat{B} = 180^\circ - \left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = 56^\circ 9' 40''$.
- Si $\widehat{P} \times \widehat{Q} = 2009$, el triangle és el mateix d'abans amb els vèrtexs canviats.

- Si $\widehat{R} \times \widehat{Q} = 2009$, $\widehat{Q} + \widehat{R} = 90^\circ$, aleshores $\widehat{Q}^2 - 90\widehat{Q} + 2009 = 0$.

Per tant, $\widehat{Q} = 41^\circ$ o 49°, i $\widehat{R}$ el complementari. Els dos casos són, doncs, el mateix cas. Prenem el primer cas, $\widehat{Q} = 41^\circ$, $\widehat{B} = 69^\circ 30'$, $\widehat{R} = 49^\circ$, $\widehat{C} = 65^\circ 30'$.

2.–Per a cada nombre natural n, considera l'enter positiu $\overbrace{\underbrace{444\ldots44}_{n}\underbrace{888\ldots889}_{n}}^{2n}$. Demostra que cada un d'ells és un quadrat perfecte i calcula'n l'arrel quadrada.

2.1.–PRIMERA SOLUCIÓ.

a) Veiem els primers casos:

- $n = 1$: el nombre és $49 = 7^2$ i l'arrel quadrada és $7 = 6 \times 10^0 + 7$.
- $n = 2$: el nombre és $44\,89 = 67^2$ i l'arrel quadrada és $67 = 6 \times 10^1 + 7$.
- $n = 3$: el nombre és $444\,889 = 667^2$ i l'arrel quadrada és $667 = 6 \times 10^2 + 67$.

b) Usem la inducció sobre n. Per a $n = 3$, ja hem vist que $444889 = 667^2$.

Suposem que, per a $n = k$, el nombre és $\overbrace{\underbrace{444\ldots44}_{k}\underbrace{888\ldots889}_{k}}^{2k} = \left(\underbrace{666\ldots6}_{k-1}7\right)^2$ i, per tant, l'arrel val $\underbrace{666\ldots6}_{k-1}7$.

Provem-ho per a $n = k+1$. Considerem el nombre $N = \overbrace{\underbrace{444\ldots44}_{k+1}\underbrace{888\ldots889}_{k+1}}^{2k+2}$. Hem de veure que la seva arrel és $A = \underbrace{666\ldots6}_{k}7$. Calculem

$$A^2 = \left(\underbrace{666\ldots6}_{k}7\right)^2 = \left(6 \times 10^k + \left(\underbrace{666\ldots6}_{k-1}7\right)\right)^2 =$$

$$= 36 \times 10^{2k} + 12 \times 10^k \times \left(\underbrace{666\ldots6}_{k-1}7\right) + \left(\underbrace{666\ldots6}_{k-1}7\right)^2$$

I, per abreujar les notacions de la taula següent, fem $\underbrace{666\ldots6}_{k-1}7 = B$.

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
 & & & \multicolumn{6}{c}{\longleftarrow\;\; k \;\;\longrightarrow} & \multicolumn{5}{c}{\longleftarrow\;\; k \;\;\longrightarrow} \\
\hline
36 \times 10^{2k} = & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{\ldots}_{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{\ldots}_{k} & 0 & 0 \\
10 \times 10^k\, B = & & 6 & 6 & 6 & 6 & \underbrace{\ldots}_{k} & 7 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{\ldots}_{k} & 0 & 0 \\
2 \times 10^k\, B = & & 1 & 3 & 3 & 3 & \underbrace{\ldots}_{k} & 3 & 4 & 0 & 0 & \underbrace{\ldots}_{k} & 0 & 0 \\
B^2 = & & & 4 & 4 & 4 & \underbrace{\ldots}_{k} & 4 & 4 & 8 & 8 & \underbrace{\ldots}_{k} & 8 & 9 \\
\hline\hline
N = A^2 = & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \underbrace{\ldots}_{k} & 4 & 8 & 8 & 8 & \underbrace{\ldots}_{k} & 8 & 9
\end{array}$$

Òbviament hem establert el resultat que preteníem.

2.2.– Segona solució. Tenim

$$N = \overbrace{\underbrace{444\ldots44}_{n}\underbrace{888\ldots889}_{n}}^{2n} = \underbrace{444\cdots44}_{2n} + \underbrace{444\cdots44}_{n} + 1 = 4A_{2n-1} + 4A_{n-1} + 1$$

on

$$A_n = 10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1 = \frac{10^{n+1}-1}{9}$$

Calculant el quadrat de A_{n-1}, queda

$$A_{n-1}^2 = \frac{10^{2n} - 2\,10^n + 1}{81} = \frac{10^{2n} - 1 - 2\,(10^n - 1)}{81} = \frac{A_{2n-1}}{9} - \frac{2A_{n-1}}{9}$$

d'on

$$A_{2n-1} = 9A_{n-1}^2 + 2A_{n-1}$$

Substituint aquesta darrera expressió al valor de N, queda

$$\begin{aligned} N &= 4A_{2n-1} + 4A_{n-1} + 1 = 4(9A_{n-1}^2 + 2A_{n-1}) + 4A_{n-1} + 1 = \\ &= 36A_{n-1}^2 + 12A_{n-1} + 1 = (6A_{n-1} + 1)^2 = \underbrace{666\cdots66}_{n} + 1 = \underbrace{666\cdots67}_{n} \end{aligned}$$

2.3.– Tercera solució. Sigui $N = \overbrace{\underbrace{444\ldots44}_{n}\underbrace{888\ldots889}_{n}}^{2n}$ el nombre donat. Tenim

$$\begin{aligned} N = 4\cdot 10^{2n-1} + 4\cdot 10^{2n-2} + \cdots + 4\cdot 10^n + \\ + 8\cdot 10^{n-1} + 8\cdot 10^{n-2} + \cdots + 8\cdot 10 + 9 \end{aligned}$$

Sumant les dues progressions geomètriques obtenim

$$\begin{aligned} N &= 4\cdot\frac{10^{2n} - 10^n}{10-1} + 8\cdot\frac{10^n - 10}{10-1} + 9 = \\ &= \frac{4}{9}\cdot 10^{2n} - \frac{4}{9}\cdot 10^n + \frac{8}{9}\cdot 10^n - \frac{80}{9} + 9 = \\ &= \frac{1}{9}\left(4\cdot 10^{2n} + 4\cdot 10^n + 1\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left((2\cdot 10^n)^2 + 2\cdot(2\cdot 10^n)\cdot 1 + 1^2\right) = \\ &= \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Això ens diu que N és un quadrat perfecte amb arrel quadrada

$$\sqrt{N} = \frac{2\cdot 10^n + 1}{3} = \underbrace{666\cdots67}_{n}$$

3.–Troba totes les ternes (x, y, z) de nombres reals que compleixen

$$\left.\begin{aligned} x^2 + \sqrt{y^2+12} &= \sqrt{y^2+60} \\ y^2 + \sqrt{z^2+12} &= \sqrt{z^2+60} \\ z^2 + \sqrt{x^2+12} &= \sqrt{x^2+60} \end{aligned}\right\}$$

Solució:

Si fem $x^2 = a$, $y^2 = b$ i $z^2 = c$, s'obté

$$\left.\begin{aligned} a + \sqrt{b+12} &= \sqrt{b+60} \\ b + \sqrt{c+12} &= \sqrt{c+60} \\ c + \sqrt{a+12} &= \sqrt{a+60} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a &= \sqrt{b+60} - \sqrt{b+12} \\ b &= \sqrt{c+60} - \sqrt{c+12} \\ c &= \sqrt{a+60} - \sqrt{a+12} \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Considerem la funció $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(t) = \sqrt{t+60} - \sqrt{t+12} = \frac{48}{\sqrt{t+60} + \sqrt{t+12}}$$

Donat que, per a $0 \leq u < v$, compleix

$$\frac{48}{\sqrt{u+60} + \sqrt{u+12}} > \frac{48}{\sqrt{v+60} + \sqrt{v+12}}$$

llavors f és decreixent i el mateix passa amb $f(f(f(t)))$.

Si observem $(*)$ ens adonem que $f(b) = a$, $f(c) = b$ i $f(a) = c$ i, per tant, $f(f(f(a))) = a$.

Ara bé, això passa si, i només si, $f(a) = a$.

a) És obvi que, si $f(a) = a$, aleshores $f(f(f(a))) = a$.

b) Recíprocament, atès que la funció $f(t)$ és decreixent, resulta que:

  i) Si $b < a = f(b)$, aleshores, $f(f(f(b))) > f(f(f(a)))$. Per tant, $b > a$. Impossible!

  ii) Si $b > a = f(b)$, aleshores, $f(f(f(b))) < f(f(f(a)))$. Per tant, $b < a$. Impossible!

De *i)* i *ii)* en resulta, doncs, que necessàriament $f(b) = a = b$. Per tant, $f(a) = a$, com volíem.

Ara, trobarem els punts fixos de f. Es a dir, hem de resoldre l'equació

$$\sqrt{t+60} - \sqrt{t+12} = t \quad \text{o bé} \quad 48 - t^2 = 2t\sqrt{t+12}.$$

Com que $48 - t^2 \geq 0$ aleshores $t \in \left[0, 4\sqrt{3}\right]$. Eliminant el radical de l'equació anterior resulta que

$$t^4 - 4t^3 - 144t^2 + 2304 = (t-4)(t^3 - 144t - 576) = 0$$

Per a tot $t \in \left[0, 4\sqrt{3}\right]$ és $t^3 < 144t + 576$. En efecte, la funció $g(t) = t^3$ és creixent. Per tant, a l'interval $\left[0, 4\sqrt{3}\right]$, pren el valor màxim quan $t = 4\sqrt{3}$. Ara bé, $\left(4\sqrt{3}\right)^3 = 64 \times 3 \times \sqrt{3} = 332{,}55 < 576$. Per tant, dins l'interval $\left[0, 4\sqrt{3}\right]$, $t^3 < 576 < 144t + 576$.

Tenint en compte que $x^2 = a$, $y^2 = b$ i $z^2 = c$, resulta que les solucions del sistema són

$$\begin{array}{cccc} (2,2,2), & (-2,2,2), & (2,-2,2), & (2,2,-2), \\ (-2,-2,2), & (-2,2,-2), & (2,-2,-2), & (-2,-2,-2), \end{array}$$

i només aquestes.

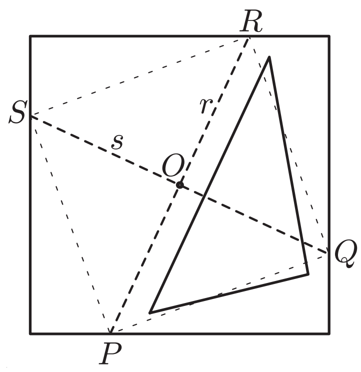
4.–Dins d'un quadrat es dibuixa un triangle de manera que el centre del quadrat caigui fora del triangle. Prova que un dels costats del triangle té la longitud més petita o igual que la longitud del costat del quadrat.

SOLUCIÓ:

Pel centre O del quadrat, tracem una recta r paral·lela al costat més proper del triangle i una perpendicular s a la recta r que passa per O.

Les rectes r i s divideixen el quadrat en quatre quadrilàters congrus. Donat que O es troba a fora del triangle, aquest tindrà punts en, com a molt, dos quadrilàters adjacents. Pel *principi del colomar*, dos dels vèrtexs del triangle pertanyen al mateix quadrilàter.

La seva distància, per tant, és més petita que la major diagonal del quadrilàter, la qual, al seu torn, és més petita o igual que la del costat del quadrat.



En efecte, si observem la figura resulta que el quadrilàter on cauen dos dels vèrtexs del triangle té dues diagonals $d_1 = \overline{OR}$, $d_2 = \overline{PQ}$. Per simplificar els càlculs, fem el costat del quadrat $= 1$. Aleshores

$$d_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

$$d_2^2 = (1-\alpha)^2 + \alpha^2 = 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad d_2 \leq 1$$

atès que, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

ALTERNATIVA A LA DEMOSTRACIÓ FINAL: El quadrat $PQRS$ està contingut al quadrat gran i té àrea més petita. Per tant, el seu costat d_2 és més petit que el costat del quadrat gran.

5.–Siguin a, b i c tres nombres reals i positius tals que $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=9$. Proveu que

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\leq\sqrt{3}.$$

Solució:

Aplicant la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i harmònica, resulta que

$$\frac{3}{2a+b}=\frac{3}{a+a+b}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Igualment,

$$\frac{3}{2b+c}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

i

$$\frac{3}{2c+a}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Sumant les desigualtats anteriors i reordenant els termes, s'obté

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Aplicant la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i quadràtica, resulta

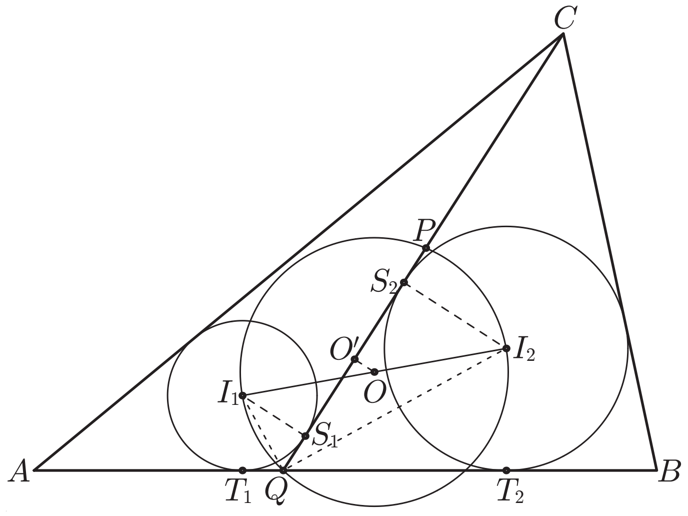
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\sqrt{3}$$

La igualtat s'assoleix quan $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Això acaba la prova.

6.–En un triangle ABC, de costats a, b i c, es consideren un punt Q sobre AB i la recta que passa per Q i C. Demostra que la circumferència que té com a diàmetre els incentres I_1 i I_2 dels triangles ACQ i BCQ talla el segment QC en el punt Q i en un altre punt P que dista $p - c$ de C, on p és el semiperímetre del triangle ABC.

SOLUCIÓ:

1) En primer lloc veiem que la circumferència de centre O passa efectivament pel punt donat Q. Unim Q amb I_1 i amb I_2. Les rectes (de punts, a la figura) formen un angle recte ja que són bisectrius d'angles adjacents. Per tant, Q es troba damunt la semicircumferència de diàmetre I_1I_2.



2) (2) A la figura, T_1, T_2 són els punts de tangència de les cirumferències inscrites en els triangles ACQ i BCQ al costat AB i S_1 i S_2 els punts de tangència a la recta CQ. O' és la projecció perpendicular de O sobre la corda QP i, per tant, el seu punt mitjà. Volem veure que $CP = p - c$.

Siguin p, p_1 i p_2 els semiperímetres dels triangles ABC, AQC i BQC, respectivament. Es comprova fàcilment que $p_1 + p_2 = p + CQ$. Es compleix que

$$QT_1 = QS_1 = p_1 - b \quad \text{i} \quad QT_2 = QS_2 = p_2 - a$$

Com que O és el punt mitjà de I_1I_2, fent projecció paral·lela, resulta que O' és el punt mitjà de S_1 i S_2; i $QS_1 = QO' - O'S_1 = PO' - O'S_2 = PS_2$ i, per tant, $QP = QS_2 + S_2P = QS_2 + QS_1 = QT_2 + QT_1 = T_1T_2$.

Però $T_1T_2 = p_1 - b + p_2 - a = p_1 + p_2 - (b + a) = p + CQ - (2p - c) = CQ - (p - c)$, d'on resulta que $PC = p - c$, tal com volíem demostrar.