XLVII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

17 i 18 de desembre de 2010

Enunciats

XLVII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

17 de desembre de 2010, de 16 a 19.30 h.

1.–Tenim 2010 cartes numerades de 1 a 2010. Demostreu que si agafem 11 cartes *qualssevol*, n'hi ha dues (numerades i i j), d'entre aquestes 11, que compleixen $i < j \leq 2i$.

2.–En un cercle de radi r hi inscrivim el decàgon regular de vèrtexs A_1, A_2, A_3, …, A_{10}. Denotem per $|A_iA_j|$ la longitud del segment $\overline{A_iA_j}$. Demostreu que

$$|A_1A_4| - |A_1A_2| = r.$$

3.–Denotem per $S(n)$ la suma

$$S(n) = 2010\,n^{2010} - 2009\,n^{2009} + \cdots + 4n^4 - 3n^3 + 2n^2 - n$$

Comproveu que el nombre

$$T = S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) + S(6) + S(7) + S(8) + S(9)$$

és positiu i calculeu-ne la xifra de les unitats.

XLVII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

18 de desembre de 2010, de 9.30 a 13 h.

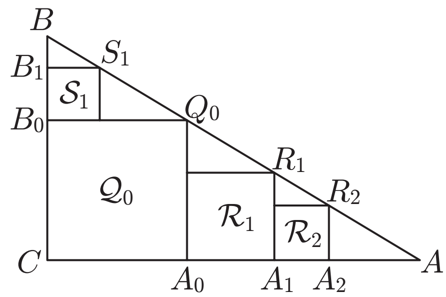
4.–Una urna conté b boles blanques i v boles vermelles, amb $b \geq 0$, $v \geq 0$ i $b + v \geq 3$. Si s'extrauen 3 boles de l'urna sense reemplaçar-les, la probabilitat que totes siguin blanques és p. Però, si afegim una bola blanca a l'urna, la probabilitat que les tres boles siguin blanques augmenta d'una tercera part.

Quin és el valor màxim de v que permet que es compleixin aquestes condicions?

5.–Tenim un triangle rectangle ABC de catets AC i CB de longituds a i b i hi inscrivim un quadrat $\mathcal{Q}_0 = CA_0Q_0B_0$ de manera que el punt A_0 es troba en el catet CA, el punt B_0 en el catet CB i el punt Q_0 en l'hipotenusa AB.

a) Calculeu el valor q del costat CA_0 del quadrat, en funció de a i b.

b) Repetim el procés n vegades inscrivint, respectivament, quadrats $\mathcal{R}_{k+1}$, $\mathcal{S}_{k+1}$ en els triangles AA_kR_k i BB_kS_k, en què els punts R_k són en el segment AQ_0 i els punts S_k en el segment BQ_0. Si r_n i s_n són les longituds dels costats dels quadrats $\mathcal{R}_n$ i $\mathcal{S}_n$, demostreu que $\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n}$.



6.–Tenim m capses $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_m$ que contenen fitxes. El nombre de fitxes de cada una és $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, ..., $q_m \geq 0$, respectivament. Considerem un nombre fix $n \leq m$.

Volem aconseguir, amb una sèrie d'actuacions, que totes les caixes acabin tenint el mateix nombre de fitxes. Cada actuació que efectuem s'ajustarà a l'acció següent: elegim n capses, i col·loquem una fitxa més en cada una de les capses elegides de manera que, després d'haver actuat, les n capses que hàgim elegit tindran una fitxa més que abans de l'actuació, i la resta tindrà el mateix nombre de fitxes que abans de l'actuació. Demostreu:

a) Si m.c.d.$(m, n) = d > 1$, aleshores hi ha una distribució inicial de fitxes en les m capses que no permet aconseguir mai que, després de qualsevol nombre d'actuacions, totes les capses tinguin el mateix nombre de fitxes.

b) Si m.c.d.$(m, n) = 1$, aleshores és posible fer un nombre finit d'actuacions successives fins a aconseguir que, al final de totes les actuacions, totes les capses tinguin el mateix nombre de fitxes.

Solucions

1.–Tenim 2010 cartes numerades de 1 a 2010. Demostreu que si agafem 11 cartes *qualssevol*, n'hi ha dues (numerades i i j), d'entre aquestes 11, que compleixen $i < j \leq 2i$.

1.1.–Primera solució.

Suposem que les 11 cartes extretes tenen números $n_1 < n_2 < \cdots < n_{11}$. Si hem d'aconseguir que no es compleixi la condició de l'enunciat, haurà de ser $n_{i+1} \geq 2n_i + 1$ per $i = 1, 2, \ldots, 10$. és a dir,

$$\begin{aligned}
n_1 &\geq 1 \quad (= 2^1 - 1) \\
n_2 &\geq 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (= 2^2 - 1) \\
n_3 &\geq 3 \cdot 1 + 1 = 7 \quad (= 2^3 - 1) \\
&\vdots \\
n_{10} &\geq 1023 \quad (= 2^{10} - 1) \\
n_{11} &\geq 2047 \quad (= 2^{11} - 1)
\end{aligned}$$

Però això és impossible si només tenim 2010 cartes.

1.2.–Segona solució.

Considerem la partició del conjunt $\{1, 2, \ldots, 2010\}$ en deu subconjunts A_1, A_2, $\ldots$, A_{10} de forma que dos elements $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$, $(i \neq j)$, no compleixin la condició de l'enunciat i, en canvi, dos elements $a_k, a'_k \in A_k$ del mateix subconjunt la compleixin sempre.

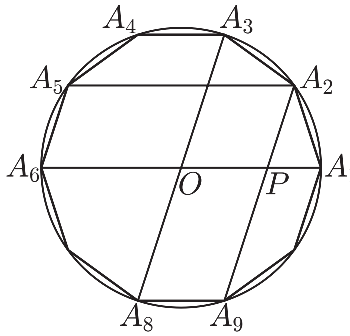
$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 2\} \\
A_2 &= \{3, 4, 5, 6\} \\
A_3 &= \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \\
A_4 &= \{15, 16, 17 \ldots, 29, 30\} \\
A_5 &= \{31, 32, \ldots, 61, 62\} \\
A_6 &= \{63, 64, \ldots, 125, 126\} \\
A_7 &= \{127, 128, \ldots, 253, 254\} \\
A_8 &= \{255, 256, \ldots, 509, 510\} \\
A_9 &= \{511, 512, \ldots, 1021, 1022\} \\
A_{10} &= \{1023, 1024, \ldots, 2009, 2010\}
\end{aligned}$$

Si tenim ara 11 cartes qualssevol, pel *principi de* **Dirichlet** (o del *"colomar"*), dues d'elles hauran de tenir números que pertanyin al mateix subconjunt A_k i, per tant, compliran la condició de l'enunciat.

2.–En un cercle de radi r hi inscrivim el decàgon regular de vèrtexs A_1, A_2, A_3, …, A_{10}. Denotem per $|A_iA_j|$ la longitud del segment $\overline{A_iA_j}$. Demostreu que

$$|A_1A_4| - |A_1A_2| = r.$$

2.1.–Primera solució (*Geomètrica*)



La corda A_2A_9, el diàmetre A_3A_8 i el costat A_5A_6 són paral·lels. També són paral·lels el diàmetre A_1A_6 i la corda A_2A_5. Tenim, per tant, dos paral·lelograms $PA_2A_5A_6$ i POA_8A_9, d'on obtenim que $|PA_9| = |OA_8| = r$ i $|A_1A_2| = |A_5A_6| = |A_2P|$. El resultat surt de $|A_1A_4| = |A_2A_9| = |A_2P| + |PA_9| = |A_1A_2| + r$.

2.2.–Segona solució (*Trigonomètrica*)

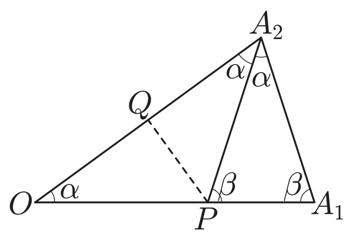
Sabem que una corda d'angle central α en un cercle de radi r val $2r\sin\frac{\alpha}{2}$. La corda (costat) A_1A_2 té longitud $|A_1A_2| = 2r\sin 18°$. Anàlogament, la corda A_1A_4 té longitud $|A_1A_4| = 2r\sin 54°$. El nostre problema es redueix a demostrar que $2\sin 54° = 1+2\sin 18°$. Passant a complementaris, això és equivalent a demostrar $2\cos 36° = 1 + 2\cos 72°$. Cal, doncs, determinar els valors de $\cos 36°$ i $\cos 72°$. Però si sabem el valor $a = \cos 36°$, aleshores $\sin 36° = \sqrt{1-a^2}$ i trobem, amb la fórmula de l'angle doble $\cos 72° = \cos^2 36° - \sin^2 36° = 2a^2 - 1$ i el problema s'acaba si podem comprovar que $2a = 2\left(2a^2 - 1\right) + 1$ $(*)$.

Sigui A_1A_2 un costat del decàgon regular de centre O, que ja podem suposar de radi 1. El triangle OA_1A_2 és isòsceles, i si A_2P és la bisectriu de l'angle a A_2 ens queden els angles marcats $\alpha = 36°$ i $\beta = 2\alpha = 72°$. Tindrem $|OP| = |PA_2| = |A_1A_2|$ i també que els triangles OA_1A_2 i A_2PA_1 són semblants. La relació de semblança ens permet calcular el costat, que resulta ser $|A_1A_2| = \frac{(\sqrt{5}-1}{2}$.

Finalment obtenim $\cos 36°$ del triangle rectangle OPQ i resulta

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

La comprovació de $(*)$ és immediata.



3.–Denotem per $S(n)$ la suma

$$S(n) = 2010\, n^{2010} - 2009\, n^{2009} + \cdots + 4n^4 - 3n^3 + 2n^2 - n$$

Comproveu que el nombre

$$T = S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) + S(6) + S(7) + S(8) + S(9)$$

és positiu i calculeu-ne la xifra de les unitats.

Solució:

Els $S(n)$ són tots positius ja que, aparellats els termes de la suma per parelles $kn^k - (k-1)n^{k-1}$, cada parella és positiva i també la suma de totes. Escrivim ara

$$\begin{aligned} S(1) &= 2010 \cdot 1^{2010} - 2009 \cdot 1^{2009} + \cdots + 2 \cdot 1^2 - 1^1 \\ S(2) &= 2010 \cdot 2^{2010} - 2009 \cdot 2^{2009} + \cdots + 2 \cdot 2^2 - 2^1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S(9) &= 2010 \cdot 9^{2010} - 2009 \cdot 9^{2009} + \cdots + 2 \cdot 9^2 - 9^1 \end{aligned}$$

Sumant per columnes les igualtats anteriors ens queda

$$\begin{aligned} T = 2010 \left(1 + 2^{2010} + \cdots + 9^{2010}\right) - 2009 \left(1 + 2^{2010} + \cdots + 9^{2010}\right) + \cdots \\ \cdots + \left(1 + 2^2 + \cdots + 9^2\right) - \left(1 + 2^1 + \cdots + 9^1\right) \end{aligned}$$

Si calculem els residus modulars de i^k mòdul 10 i de la suma $a_k = 1^k + 2^k + \cdots + 9^k$ obtenim

	1^k	2^k	3^k	4^k	5^k	6^k	7^k	8^k	9^k	a_k
$k=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5
$k=2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	5
$k=3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9	5
$k=4$	1	6	1	6	5	6	1	6	1	3
$k=5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5

que dóna 5 si $k \neq \dot{4}$ i 3 si $k = \dot{4}$. Com que els residus de 1, 2, ..., 2010 mòdul 10 es repeteixen de 10 en 10 i els de les sumes a_k de 4 en 4, podem calcular T mòdul 10 en blocs de 20 ($=$ m.c.m.$(10,4)$). Calculat un qualsevol d'aquest blocs surt $2010 \cdot 5 - 2009 \cdot 5 + 2008 \cdot 3 - 2007 \cdot 5 + \cdots + 1994 \cdot 5 - 1993 \cdot 5 + 1992 \cdot 3 - 1991 \cdot 5 = 0$ mòdul 10. A T hi ha 100 blocs d'aquest tipus, que en total sumaran 0, i una cua de 10 sumands més. Calculant directament aquesta cua mòdul 10 queda

$$\begin{aligned} T = 10 \left(1 + 2^{10} + \cdots + 9^{10}\right) - 9 \left(1 + 2^9 + \cdots + 9^9\right) + \cdots \\ \cdots + 2 \left(1 + 2^9 + \cdot + 9^9\right) - (1 + 2 + \cdots + 9) = \\ = 0 \cdot 5 - 9 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 1 \end{aligned}$$

4.–Una urna conté b boles blanques i v boles vermelles, amb $b \geq 0$, $v \geq 0$ i $b + v \geq 3$. Si s'extrauen 3 boles de l'urna sense reemplaçar-les, la probabilitat que totes siguin blanques és p. Però, si afegim una bola blanca a l'urna, la probabilitat que les tres boles siguin blanques augmenta d'una tercera part.

Quin és el valor màxim de v que permet que es compleixin aquestes condicions?

Solució:

Si p és la probabilitat de treure 3 boles blanques abans d'afegir una altra bola blanca, i q és aquesta probabilitat després d'afegir una altra bola blanca, tenim, per hipòtesi que $q = \frac{4}{3}p$. Estudiem primer els casos baixos.

a) Si $b = 0$ ($v \geq 3$) o $b = 1$ ($v \geq 2$), aleshores $p = q = 0$ i v pot prendre qualsevol valor i no hi ha màxim.

b) Si $b = 2$ ($v \geq 1$), aleshores $p = 0$, $q \neq 0$ i la condició del problema no es pot complir.

c) Suposem, doncs, que $b \geq 3$. Les probabilitats demanades, abans i després d'afegir una bola blanca són, respectivament,

$$p = \frac{b(b-1)(b-2)}{(b+v)(b+v-1)(b+v-2)}\,, \quad q = \frac{(b+1)b(b-1)}{(b+v+1)(b+v)(b+v-1)}$$

La relació $4p = 3q$ es converteix, després de simplificar,

$$4(b-2)(b+v+1) = 3(b+1)(b+v-2)\,, \quad \text{o bé} \quad b^2 + bv - b - 11v - 2 = 0$$

D'aquesta última expressió surt

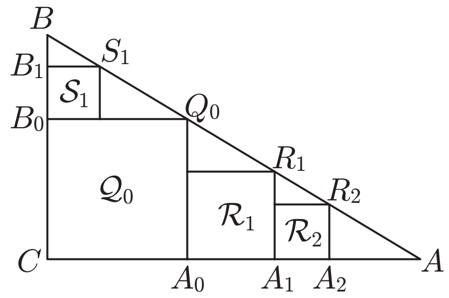
$$v = \frac{b^2 - b - 2}{11 - b} = -b - 10 + \frac{108}{11 - b}$$

i com que b, v són enters positius, ha de ser $11 - b$ divisor de 108 i b menor que 11. Aquests possibles valors per $11 - b$ són 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. Les parelles (b, v) vàlides són $(10, 88)$, $(9, 35$, $(8, 18)$, $(7, 10)$ i $(5, 3)$. La que dóna v màxima és la que correspon a $v = 88$, $b = 10$.

5.–Tenim un triangle rectangle ABC de catets AC i CB de longituds a i b i hi inscrivim un quadrat $\mathcal{Q}_0 = CA_0Q_0B_0$ de manera que el punt A_0 es troba en el catet CA, el punt B_0 en el catet CB i el punt Q_0 en l'hipotenusa AB.

a) Calculeu el valor q del costat CA_0 del quadrat, en funció de a i b.

b) Repetim el procés n vegades inscrivint, respectivament, quadrats $\mathcal{R}_{k+1}$, $\mathcal{S}_{k+1}$ en els triangles AA_kR_k i BB_kS_k, en què els punts R_k són en el segment AQ_0 i els punts S_k en el segment BQ_0. Si r_n i s_n són les longituds dels costats dels quadrats $\mathcal{R}_n$ i $\mathcal{S}_n$, demostreu que $\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n}$.



SOLUCIÓ:

a) Calculem q. La semblança dels triangles rectangles CAB i A_0BD_0 dóna $\frac{q}{b} = \frac{a-q}{a}$, d'on surt

$$q = \frac{ab}{a+b}$$

b) La semblança dels dos triangles CAB i A_0BD_0 té raó de semblança

$$\rho = \frac{b}{a+b}.$$

Anàlogament, si fem la semblança entre els triangles CAB i B_0D_0B obtenim la raó

$$\sigma = \frac{a}{a+b}$$

Observem que $\rho + \sigma = 1$. Calculem ara, per semblança, els costats r_n i s_n. Tenim $r_1 = \rho q$, $r_2 = \rho r_1 = \rho^2 q$, $\ldots$, $r_n = \rho^n q$. De manera semblant obtenim $s_n = \sigma^n q$. Si fem les arrels n-èsimes d'aquestes dues expressions i sumem queda

$$\sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n} = (\rho + \sigma)\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{q}$$

6.–Tenim m capses $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, …, $\mathcal{C}_m$ que contenen fitxes. El nombre de fitxes de cada una és $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, …, $q_m \geq 0$, respectivament. Considerem un nombre fix $n \leq m$.

Volem aconseguir, amb una sèrie d'actuacions, que totes les caixes acabin tenint el mateix nombre de fitxes. Cada actuació que efectuem s'ajustarà a l'acció següent: elegim n capses, i col·loquem una fitxa més en cada una de les capses elegides de manera que, després d'haver actuat, les n capses que hàgim elegit tindran una fitxa més que abans de l'actuació, i la resta tindrà el mateix nombre de fitxes que abans de l'actuació. Demostreu:

a) Si m.c.d.$(m,n) = d > 1$, aleshores hi ha una distribució inicial de fitxes en les m capses que no permet aconseguir mai que, després de qualsevol nombre d'actuacions, totes les capses tinguin el mateix nombre de fitxes.

b) Si m.c.d.$(m,n) = 1$, aleshores és possible fer un nombre finit d'actuacions successives fins a aconseguir que, al final de totes les actuacions, totes les capses tinguin el mateix nombre de fitxes.

Solució:

Posem $N = q_1 + q_2 + \cdots + q_m$. També suposarem, si cal, que $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_m$.

a) Si m.c.d.$(m,n) = d > 1$, com que a cada actuació afegim n fitxes, després de s actuacions haurem afegit ns fitxes de manera que en total quedaran a les capses $N + ns$ fitxes. Si totes les capses tenen el mateix nombre k de fitxes, serà $N + ns = km = \dot{m} = \dot{d}$. Com que també $n = \dot{d}$ haurà de ser $N = \dot{d}$. Per tant, qualsevol distribució inicial de fitxes amb N no múltiple de d no permetrà igualar les capses.

b) b) Si m.c.d.$(m,n) = 1$, l'equació $nx - my = 1$ té solucions enteres, per exemple, (x_0, y_0). A més, sabem que les solucions són els punts de coordenades enteres sobre la recta del pla $nx - my = 1$, punts que s'obtenen a partir del (x_0, y_0) sumant múltiples enters del vector (m,n) o, dit altrament, la solució general és $(x,y) = (x_0, y_0) + t(m,n)$ per qualsevol t enter. Fent t positiu i prou gran podem aconseguir que una solució (x,y) tingui la x i la y positives. Sigui (s,r) una d'aquestes solucions.

Serà, doncs, $ns = mr + 1$. Aquesta igualtat ens permet afirmar que després de s actuacions haurem pogut posar ns fitxes que les podem distribuir en la forma de r per capsa, més una que ens sobrarà que la posarem a la capsa que en té menys, $\mathcal{C}_1$. Haurem disminuït la diferència $q_n - q_1$ en una unitat i les altres diferències $q_n - q_2$, …, $q_n - q_{n-1}$ quedaran igual. Ara és evident que després de repetir aquest procediment de s actuacions tantes vegades com faci falta (en total $q_n - q_1 + q_n - q_2 + \cdots + q_n - q_{n-1} = nq_n - N$ vegades) haurem igualat les fitxes a les capses. El total d'actuacions haurà estat $s(nq_n - N)$.