XLVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 i 17 de desembre de 2011

Enunciats

XLVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

16 de desembre de 2011, de 16 a 19.30 h.

1.–Siguin a, b i c tres nombres reals positius el producte dels quals és 1. Demostra que, si la suma d'aquests nombres és més gran que la suma dels seus recíprocs, aleshores exactament un d'ells és més gran que 1.

2.–En un triangle rectangle d'hipotenusa unitat i angles de 30°, 60° i 90°, s'elegeixen 25 punts qualssevol. Demostra que sempre n'hi haurà 9 d'ells que podran cobrir-se amb un semicercle de radi $\frac{3}{10}$.

3.–Sigui ABC un triangle arbitrari.

a) Si H n'és l'ortocentre, quant val la distància AH?

b) b) Si P n'és un punt interior i H_A, H_B i H_C són, respectivament, els ortocentres dels triangles PBC, PAC i PAB, demostra que els triangles $H_AH_BH_C$ i ABC tenen la mateixa àrea.

XLVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

17 de desembre de 2011, de 9.30 a 13 h.

4.–Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex i P un punt interior. Determineu quines són les condicions que han de complir el quadrilàter i el punt P perquè els quatre triangles PAB, PBC, PCD i PDA tinguin la mateixa àrea.

5.–Tenim una col·lecció d'esferes iguals que apilem formant un tetràedre les arestes del qual tenen totes n esferes. Calculeu, en funció de n, el nombre total de punts de tangència (contactes) que hi ha entre les esferes de la pila.

6.–Siguin a, b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b\left(a^2 + c^2\right) + c^3,$$

demostra que les mesures (en radians) dels angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ compleixen la relació

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}$$

Solucions

XLVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Enunciats i solucions

Problema 1.

Siguin a, b i c tres nombres reals positius el producte dels quals és 1. Demostra que, si la suma d'aquests nombres és més gran que la suma dels seus recíprocs, aleshores exactament un d'ells és més gran que 1.

Solució.

Atès que $abc = 1$ i $a + b + c > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, tenim que

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0\end{aligned}$$

La desigualtat anterior es compleix quan un dels factors del nombre

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

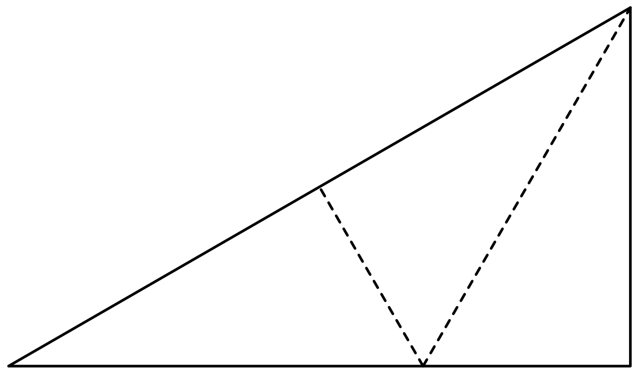
és positiu o els tres factors són positius. Si fossin positius tots tres, tindríem $a > 1, b > 1$ i $c > 1$, cosa que no és possible perquè $abc = 1$. Per tant, només un d'ells és positiu i això acaba la demostració.

Problema 2.

En un triangle rectangle d'hipotenusa unitat i angles de $30°$, $60°$ *i* $90°$, *s'elegeixen 25 punts qualssevol. Demostra que sempre n'hi haurà 9 d'ells que podran cobrir-se amb un semicercle de radi* $\frac{3}{10}$.

Solució.

Aquest triangle es pot descompondre en tres triangles congruents i semblants al triangle inicial.



Tenim 3 triangles i 25 punts. En algun triangle hi haurà almenys 9 punts. La hipotenusa de cada un d'aquests triangles semblants a l'inicial mesura $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Els triangles són rectangles i per tant estan coberts per la meitat del cercle circumscrit. Això acaba el que es demana ja que el radi d'aquest cercle circumscrit, r, compleix

$$r = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}.$$

Problema 3.

Sigui ABC un triangle arbitrari.

a) Si H n'és l'ortocentre, quant val la distància AH?

b) Si P n'és un punt interior i H_A, H_B i H_C són, respectivament, els ortocentres dels triangles PBC, PAC i PAB, demostra que els triangles $H_AH_BH_C$ i ABC tenen la mateixa àrea.

Solució.

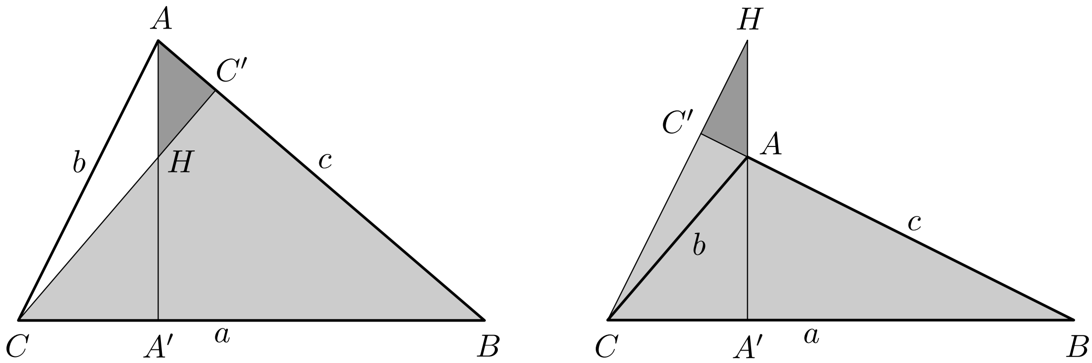
a)
Calculem la distància d'un vèrtex A a l'ortocentre del triangle ABC.
A les figures següents podem observar que els triangles BCC' i AHC' són semblants. (Recordem que els angles de costats perpendiculars són iguals o suplementaris). D'aquesta semblança resulta

$$\frac{AH}{CB} = \frac{AC'}{CC'} \Leftrightarrow \frac{AH}{a} = \frac{AC'}{CC'}$$

i, per tant

$$AH = a\frac{AC'}{CC'}.$$

Si el triangle és acutangle (figura de l'esquerra) tenim que en el triangle ACC' és, òbviament, $AC' = b\cos A$ i $CC' = b\sin A$.



Substituint, queda

$$AH = a\cot A.$$

Si el triangle ABC és rectangle a A, la fórmula és també vàlida, però en aquest cas és $A = H$ i $AH = a\cot 90° = 0$. Si és obtusangle, el punt H és exterior al triangle i queda $AC' = b\cos(180° - A)$ i $CC' = b\sin(180° - A)$, i per tant, $AH = -a\cot A$. Però en aquest cas $\cot A$ és negativa.
Les distàncies de l'ortocentre H als vèrtexs aguts d'un triangle rectangle o obtusangle surten d'una manera semblant.

b) Quan unim el punt arbitrari P amb els vèrtexs A, B i C del triangle obtenim els tres triangles PAB, PBC i PCA.
Siguin $\alpha = \angle BPC, \beta = \angle APC, \gamma = \angle APB$. Òbviament, $\alpha + \beta + \gamma = 360°$. D'aquests tres angles, com a mínim dos són obtusos. L'altre pot ser obtús, recte o agut. Estudiarem els tres casos per separat.

b1) Suposem que els tres angles són obtusos (Figura 1). Pel que hem dit a l'apartat a) tenim $PH_A = -a \cot \alpha$ i $PH_C = -c \cot \gamma$. Fixem-nos que l'angle $y = \angle H_A P H_C = 180° - \angle APC = 180° - B$ ja que els costats $H_A P$ i $H_C P$ són, respectivament, perpendiculars als costats, BC i AB i l'un és obtús i l'altre és agut.
L'àrea $\mathcal{A}(PH_AH_C)$ del triangle PH_AH_C és, òbviament,

$$\mathcal{A}(PH_AH_C) = \frac{\overline{PH}_A\,\overline{PH}_C \sin y}{2} = \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma.$$

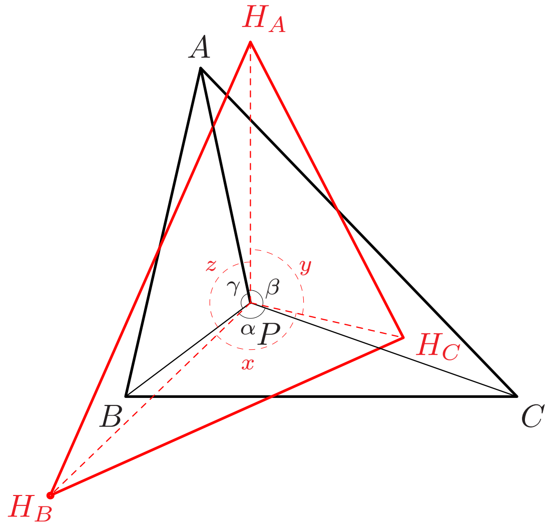


Figura 1

Sumant, doncs, les àrees dels tres triangles PH_AH_B, PH_BH_C i PH_CH_A obtenim

$$\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(PH_AH_B) + \mathcal{A}(PH_BH_C) + \mathcal{A}(PH_CH_A) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(ABC)\Big(\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha\Big).$$

Aleshores, com que $\alpha + \beta = 360 - \gamma$ tenim que $\cot(\alpha + \beta) = -\cot \gamma$ o, equivalentment,

$$\cot \gamma = -\cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\text{o bé,} \quad \cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha = 1. \qquad (*)$$

D'aquí resulta $\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(ABC)$.

b2) Suposem que un dels angles és recte, per exemple $\beta = 90°$. Aleshores $H_B = P$ i

$$\mathcal{A}(H_AH_BH_C) = \mathcal{A}(H_APH_C) = \frac{\overline{PH}_A\,\overline{PH}_C \sin y}{2} = \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma$$

Però la mateixa identitat (*) ens diu que si $\cot \beta = 0$ ha de ser $\cot \alpha \cot \gamma = 1$, i d'aquí el resultat en aquest cas.

b3) Suposem ara que un dels angles α, β, γ és agut, per exemple, $\widehat{APC} = \beta < 90°$ (Figura 3). El punt P és exterior al triangle $H_A H_B H_C$ i tenim $\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(P H_A H_C) - \mathcal{A}(P H_A H_B) - \mathcal{A}(P H_C H_B)$.

Figura 2

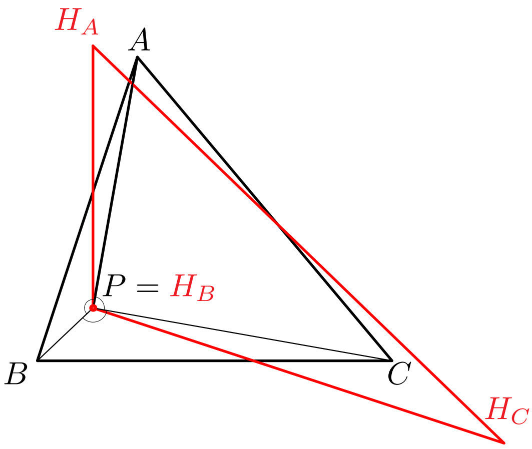
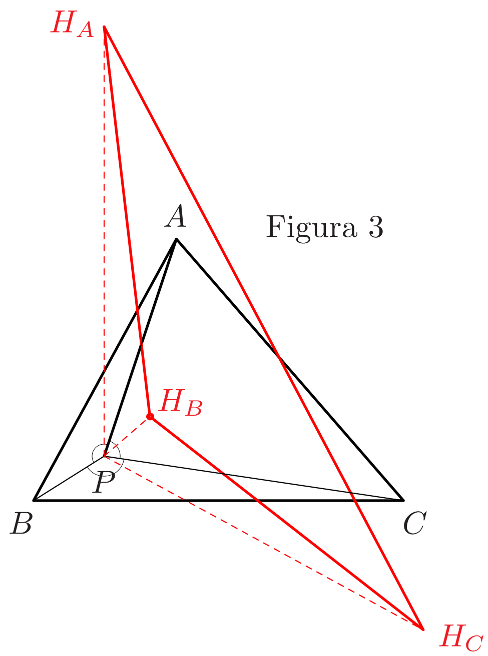


Figura 3



Però en aquest cas tenim $PH_B = b \cot \beta$, $PH_A = -a \cot \alpha$ i $PH_C = -c \cot \gamma$ i, per tant,

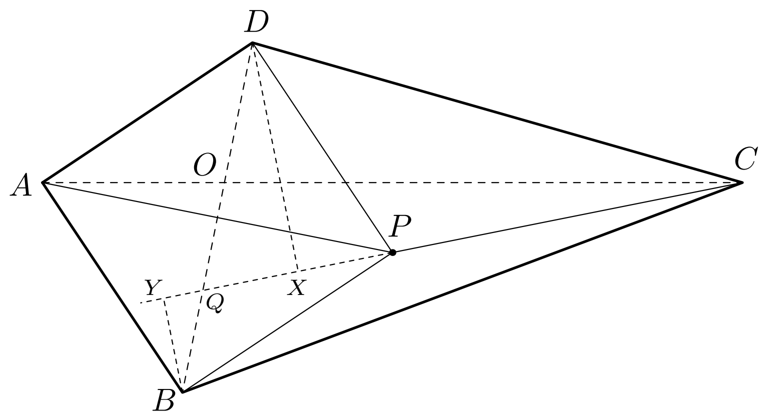
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(H_A H_B H_C) &= \mathcal{A}(P H_A H_C) - \mathcal{A}(P H_A H_B) - \mathcal{A}(P H_C H_B) = \\
&= \big(\cot\alpha\cot\gamma - (-\cot\alpha\cot\beta) - (-\cot\gamma\cot\beta)\big)\mathcal{A}(ABC) = \\
&= (\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha)\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABC).
\end{aligned}$$

Problema 4.

Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex i P un punt interior. Determineu quines són les condicions que han de complir el quadrilàter i el punt P perquè els quatre triangles PAB, PBC, PCD i PDA tinguin la mateixa àrea.

Solució.

Considrem, d'antuvi, els triangles PCD i PCB. Tenen la base comuna PC i altures corresponents DX i BY. Si volem que tinguin la mateixa àrea cal que les altures siguin iguals. Per tant, el punt Q ha de ser el punt mitjà de la diagonal BD. La recta CP passa per Q. Anàlogament, considerem els triangles ADP i PAB de base comuna AP. Pel mateix argument d'abans, han de tenir altures iguals i AP ha de passar per Q. En resulta que AP i CP tenen dos punts en comú: P i Q. Els segments AP i PC estan, doncs, alineats. És a dir, és la diagonal AC.
Cal doncs, que les dues diagonals es tallin en el punt mitjà d'una d'elles. Però mirant els triangles PDA i PDC, que han de tenir la mateixa àrea, resulta que P ha de ser el punt mitjà de AC.
La condició demanada és que les diagonals del quadrilàter es tallin en el punt mitjà d'una d'elles i el punt P sigui el punt mitjà de l'altra.

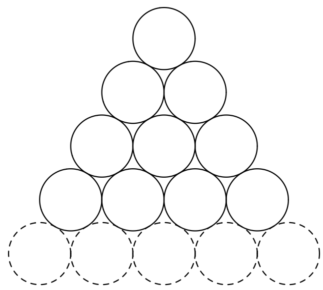


Problema 5.

Tenim una col·lecció d'esferes iguals que apilem formant un tetràedre les arestes del qual tenen totes n esferes. Calculeu, en funció de n, el nombre total de punts de tangència (contactes) que hi ha entre les esferes de la pila.

Solució.

El problema en el pla.



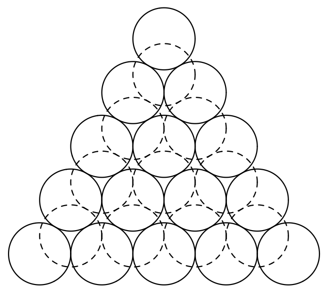
D'antuvi, analitzem el problema en el cas pla, que és molt senzill. Sigui A_n el nombre de contactes de n esferes col·locades en un triangle pla amb n esferes en cada un dels costats (figura de la dreta). Fixem-nos que el nombre total d'esferes és, evidentment, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Podem procedir per inducció. Si hi ha $n = 2$ files el nombre de contactes és 3; és a dir, $A_2 = 3$. Fixem-nos que, curiosament, coincideix amb el nombre de boles del triangle de dues files.
En un triangle de $n-1$ files hi ha A_{n-1} contactes. Òbviament, en un triangle de n files hi haurà els contactes que ja hi ha en un triangle de $n-1$ files , més els que provinguin d'afegir la darrera fila, tal com està indicat a la figura anterior. Però és clar que, en afegir aquesta darrera fila es produeixen contactes de dues menes:

- Els que hi ha entre les boles de la fila n-èsima, que són $n-1$.
- Els que tenen les boles de la fila n-èsima amb l'anterior, que són $2(n-1)$.

Així doncs, $A_n = A_{n-1} + 3(n-1)$, o bé, $A_n - A_{n-1} = 3(n-1)$. Sumant queda

$$A_n = 3\big((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1\big) = 3\frac{n(n-1)}{2} = 3T_{n-1}.$$

El problema en l'espai tridimensional.



Ara ja podem analitzar el cas a l'espai. Sigui C_n el nombre de contactes d'una pila tetraèdrica d'esferes l'aresta de la qual té n esferes. A la figura de la dreta hi hem representat les esferes de la base en traç continu i les del pis immediat superior en traç discontinu, mirant-ho a vista d'ocell. Quan afegim el pis n-èsim, afegim contactes de dues menes:

- Els propis del pis – un triangle pla de n boles de costat.
- Els que provenen de contactes entre el pis $n-1$ i el pis n.

Els contactes del primer tipus són, com hem vist en el cas pla, $A_n = 3T_{n-1}$.
El nombre de contactes entre un pis i l'anterior és $3T_{n-1}$, ja que cada bola del pis $n-1$ toca exactament tres vegades les boles del pis n. (Vegeu la figura.) En total, doncs, el

nombre de contactes és $C_n - C_{n-1} = A_n + 3T_{n-1} = 3n(n-1)$. Si sumem queda

$$C_n - C_2 = 3n(n-1) + \cdots + 3 \cdot 3(3-1) = 3(n^2 + \cdots + 3^2) - 3(n + \cdots + 3),$$

o bé

$$C_n = 3(n^2 + \cdots + 2^2 + 1^2) - 3(n + \cdots + 2 + 1) = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} = n^3 - n.$$

Un altre camí. La recurrència $C_n = C_{n-1} + 3n(n-1)$ es pot resoldre escrivint C_n com un polinomi cúbic i calculant-ne els coeficients a partir de la recurrència i de la condició inicial $C_1 = 0$.
Si fem $C_n = an(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn + d$, la condició de recurrència dóna $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, i la condició $C_1 = 0$ dóna $d = 0$. En resum

$$C_n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = n^3 - n.$$