XLIX OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 i 15 de desembre de 2012

Enunciats

XLIX OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

14 de desembre de 2012, de 16 a 19.30 h.

1.–Tenim dues galledes d'aigua de volums respectius 4 i 9 litres, inicialment buides. Volem aconseguir que la galleda més gran contingui exactament 6 litres d'aigua repetint, totes les vegades que calgui i en l'ordre que vulguem, les operacions següents:

1) omplir una de les galledes fins a dalt;

2) buidar completament una de les galledes;

3) abocar part o el total del contingut d'una galleda a l'altra galleda fins que la primera quedi buida o la segona plena. (Se suposa que disposem d'una font que raja constantment i un lloc on llençar tota l'aigua que calgui.)

Digueu quina successió d'aquestes operacions hem de realitzar per aconseguir el nostre objectiu.

2.–Sigui H l'ortocentre d'un triangle acutangle $\triangle ABC$ d'altures h_a, h_b, h_c respectivament. Demostreu que

$$\frac{HA}{h_a} + \frac{HB}{h_b} + \frac{HC}{h_c} = 2$$

3.–Determineu totes les solucions enteres de l'equació

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

No es pot fer ús de calculadores

XLIX OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

15 de desembre de 2012, de 9.30 a 13 h.

4.–Sigui n un nombre enter més gran que 3. Suposem donats n punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats. Sigui k un enter tal que $n/2 < k < n$. Tracem una col·lecció de segments rectilinis, amb la condició que els extrems de cada un d'ells pertanyin al conjunt dels n punts. Suposem que cada un dels n punts és extrem d'almenys k segments diferents. Demostreu que com a mínim hi ha una terna dels segments dibuixats que són els costats d'un triangle.

5.–Trobeu una fórmula que doni l'àrea d'un triangle en funció de les seves mitjanes m_a, m_b, m_c. Es pot utilitzar la *fórmula d'***Heron** que dóna l'àrea d'un triangle en funció dels seus costats a, b, c:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

on $2p = a + b + c$.

6.–Demostreu que existeix un nombre natural que expressat en base deu conté 2012 nous consecutius i que és el quadrat d'un altre nombre natural.

Solucions

Problema 1.

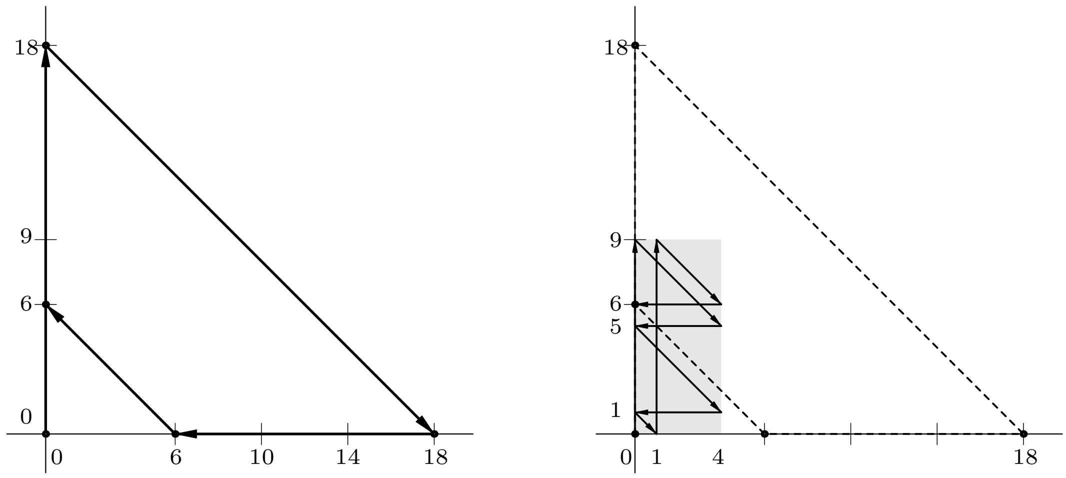
Tenim dues galledes d'aigua de volums respectius 4 *i* 9 *litres, inicialment buides. Volem aconseguir que la galleda més gran contingui exactament* 6 *litres d'aigua repetint, totes les vegades que calgui i en l'ordre que vulguem, les operacions següents:*
(1) omplir una de les galledes fins a dalt;
(2) buidar completamnet una de les galledes;
(3) abocar part o el total del contingut d'una galleda a l'altra galleda fins que la primera quedi buida o la segona plena. (Se suposa que disposem d'una font que raja constantment i un lloc on llençar tota l'aigua que calgui.)
Digueu quina successió d'aquestes operacions hem de realitzar per aconseguir el nostre objectiu.

Solució.

Denotem (i, j) la situació en què en la galleda de 4 litres n'hi ha i, i en la galleda de 9 litres n'hi ha j.
Suposem que inicialment les galledes estan buides. Llavors les opearcions que hem de fer es poden escriure així:

$$(0,0) \longrightarrow (0,9) \longrightarrow (4,5) \longrightarrow (0,5) \longrightarrow (4,1) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (1,0) \longrightarrow (1,9) \longrightarrow (4,6) \longrightarrow (0,6).$$

Si x, y són, respectivament, els nombres de galledes que hem d'omplir de 4 i de 9 litres, haurà de complir-se $4x + 9y = 6$ i aquesta equació diofàntica té la solució mínima $x_0 = -3$, $y_0 = 2$. Això vol dir que caldrà emplenar dues vegades la galleda de 9 litres i llençar 3 vegades l'aigua de la galleda de 4 litres.
Suposem que tenim un recipient de gran cabuda on hi posem les dues galledes de 9 l, i un altre recipient de gran cabuda d'on hi traiem les galledes de 4 l. Haurem de posar dues galledes de 9 l al primer, transvasar aquesta aigua al segon, i treure 3 galledes de 4 l del segon.
Representem l'aigua del primer recipient en l'eix y i l'aigua del segon a l'eix x. Tenim la figura de l'esquerra:



Però si els dos recipients tenen la cabuda limitada a 9 l i 4 l, hem de *plegar* el gràfic dins del rectangle gris. Això es pot fer de manera única tal com està a la figura de la dreta, i obtenim la seqüència posada al principi.

Problema 2.

Sigui H l'ortocentre d'un triangle acutangle $\triangle ABC$ d'altures h_a, h_b, h_c respectivament. Demostreu que

$$\frac{HA}{h_a} + \frac{HB}{h_b} + \frac{HC}{h_c} = 2.$$

Solució.

L'àrea S del triangle $\triangle ABC$ és igual a la suma de les àrees dels triangles $\triangle HAB$, $\triangle HBC$ i $\triangle HCA$. Denotant A', B', C' respectivament als peus de les altures tenim

$$S = \frac{1}{2}a \cdot HA' + \frac{1}{2}b \cdot HB' + \frac{1}{2}c \cdot HC',$$

on a, b, c són, com és habitual, les longituds dels respectius costats del triangle $\triangle ABC$. Com que

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

obtenim

$$1 = \frac{HA'}{h_a} + \frac{HB'}{h_b} + \frac{HC'}{h_c}.$$

Si ara tenim en compte que $HA' = h_a - HA$, $HA' = h_a - HA$, $HA' = h_a - HA$, i substituim aquests valors a l'expressió anterior, obtenim el resultat.

Problema 3.

Determineu totes les solucions enteres de l'equació

$$x^3 - y^3 = x + 61.$$

Solució.

Primera Solució. Posem $x = a+y$. Llavors l'equació anterior, en funció de a i y, s'escriu com

$$(3a-1)y^2 + a(3a-1)y + a^3 - 61 = 0.$$

Observem que si $a \leq -1$ el discriminant d'aquesta equació de segon grau

$$\Delta = (3a-1)(244 - a^2 - a^3)$$

és negatiu i per tant, no té solució. El mateix passa si $a \geq 6$, de manera que només cal mirar els casos $a = 1, 2, 3, 4, 5$. Es veu fàcilment que només el cas $a = 1$ ens dóna un valor de $a^3 - 61$ múltiple de $(3a-1)$. Resolem l'equació de segon grau en y anterior amb $a = 1$ i obtenim $y = 5$ (que implica $x = 6$) i $y = -6$ (que implica $x = -5$).
Segona Solució. Aprofitant els càlculs de la solució anterior veiem que hem de trobar a tal que $a^3 - 61$ sigui múltiple de $(3a-1)$. Fem la divisió d'aquests polinomis com si estiguéssim treballant amb polinomis a coeficients racionals (en realitat ens inetressen els polinomis a coeficients enters).

Obtenim

$$a^3 - 61 = (3a-1)(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a + \frac{1}{27}) + \frac{1}{27} - 61.$$

Multiplicant per 27

$$27(a^3 - 1) = (3a-1)(9a^2 + 3a + 1) - 1646.$$

Així, per tal que $a^3 - 61$ sigui múltiple de $(3a-1)$ ha de ser 1646 múltiple de $(3a-1)$. Equivalentment, $3a-1$ ha de dividir $2 \cdot 823$. Ha de ser $3a - 1 = \pm 1, \pm 2, \pm 823$. A partir d'aquí és fàcil veure que l'únic cas possible és $a = 1$ i el problema s'acaba com a la primera solució.

Tercera solució. Multipliquem per 27 i restem 1. Obtenim

$$27x^3 - 27y^3 - 1 = 27xy + 1646,$$

que es pot escriure com

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 = 3(3x)(-3y) + 1646.$$

Tenint en compte la igualtat

$$a^3 + b^2 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

obtenim

$$(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y) = 2 \cdot 823.$$

Com 2 i 823 són primers, tenim

$$\begin{aligned} 3x - 3y - 1 &= 2 \\ 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y &= 823. \end{aligned}$$

Substituint $y = x - 1$ a la segona equació obtenim $27x^2 - 27x - 813 = 0$, equació de segon grau que té solucions $x = 6$ $(y = 5)$ i $x = -5$ $(y = -6)$.

Si haguèssim imposat

$$\begin{aligned} 3x - 3y - 1 &= 823 \\ 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y &= 2. \end{aligned}$$

haguèssim obtingut $27x^2 - 7416x + 679799 = 0$, que no té solucions reals.

Problema 4.

Sigui n un nombre enter més gran que 3. Suposem donats n punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats. Sigui k un enter tal que $n/2 < k < n$. Tracem una col·lecció de segments rectilinis, amb la condició que els extrems de cada un d'ells pertanyin al conjunt dels n punts. Suposem que cada un dels n punts és extrem d'almenys k segments diferents. Demostreu que com a mínim hi ha una terna dels segments dibuixats que són els costats d'un triangle.

Solució.

Com que $k > 2$, d'entre els n punts n'hi ha almenys dos connectats per un segment. Siguin aquests punts P_1 i P_2. Dividim la resta de punts en dos subconjunts A i B, amb A el conjunt de punts connectats amb P_1 i B el conjunt de punts connectats amb P_2. Per hipòtesis $|A| \geq k-1$ i $|B| \geq k-1$. Així

$$n - 2 \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geq 2k - 2 - |A \cap B|.$$

Per tant,

$$|A \cap B| \geq 2k - n > 0.$$

Això implica $|A \cap B| \neq 0$, i existeix un punt P_3 connectat amb P_1 i P_2.

Problema 5.

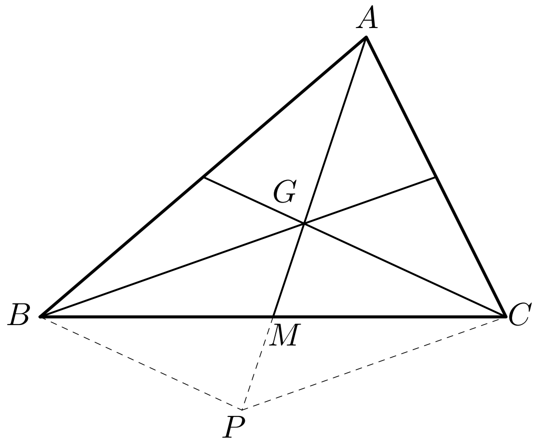
Trobeu una fórmula que doni l'àrea d'un triangle en funció de les seves mitjanes m_a, m_b, m_c. Es pot utilitzar la fórmula d'Heron que dóna l'àrea d'un triangle en funció dels seus costats a, b, c :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

on $2p = a + b + c$.

Solució.

És conegut que les mitjanes d'un triangle $\mathcal{T} = \triangle ABC$ el divideixen en sis triangles d'igual àrea. El baricentre G és vèrtex comú d'aquests sis triangles. Sigui M el punt mitjà del costat AB, i sigui P el punt sobre la recta CG, diferent de G, tal que $MG = MP$.



L'àrea del triangle $\triangle BPG$ és igual a $1/3$ de l'àrea de $\mathcal{T}$, ja que el triangle $\triangle APG$ està format per dos triangles d'igual àrea, $\triangle AMP$ i $\triangle AMG$, i l'àrea d'aquests dos últims és igual a $1/6$ de l'area de $\mathcal{T}$.
Les longituds dels costats del triangle $\triangle APG$ són respectivament $2m_a/3, 2m_b/3, 2m_c/3$.
Observeu que AP i BG són iguals, pel criteri del CAC aplicat als triangles $\triangle AMP$ i $\triangle MGB$.
Per tant, làrea S de $\mathcal{T}$ val

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)},$$

amb $2m = m_a + m_b + m_c$.

Problema 6.

Demostreu que existeix un nombre natural que expressat en base deu conté 2012 *nous consecutius i que és el quadrat d'un altre nombre natural.*

Solució.

Observeu que

$$\begin{aligned} 9^2 &= 81 \\ 99^2 &= 9801 \\ 999^2 &= 998001 \\ 9999^2 &= 99980001 \\ 99999^2 &= 9999800001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Això ens permet conjecturar que el quadrat del número format per 2013 nous comença amb 2012 nous.
De fet, tenim

$$[10^{2013}-1]^2 = 10^{4026}+1-2\cdot 10^{2013} = 10^{4026}+1-1+1-2\cdot 10^{2013} = (10^{4026}-1)-2(10^{2013}-1).$$

I ara ja es veu que els 2012 primers nous de $10^{4026}-1$ no queden afectats en realitar la resta $(10^{4026}-1)-2(10^{2013}-1)$.