L OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 i 14 de desembre de 2013

Enunciats

L OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

13 de desembre de 2013, de 16 a 19.30 h.

1.–Sigui $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n, el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.

2.–Trobeu totes les solucions reals del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-8y+16} = 5 \\ 9y^2-4x^2 = 60 \end{cases}$$

3.–Siguin H_B i H_C els peus de les altures del triangle ABC corresponents als vèrtexs B i C respectivament. Sigui Γ la circumferència que passa per A, H'_B, H'_C, on H'_B és el simètric del punt H_B respecte del punt mitjà del costat AC, i H'_C és el simètric del punt H_C respecte del punt mitjà del costat AB.

a) Demostreu que si Γ és tangent al costat BC, llavors el punt de tangència és el punt mitjà del costat BC.

b) Doneu una condició en funció de les longituds a, b, c dels costats del triangle per tal que es doni aquesta situació de tangència.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

L OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

14 de desembre de 2013, de 9.30 a 13 h.

4.–Busqueu els nombres enters positius n menors de 201314 tals que en dividir 3^n i 5^n per 13 donin residus 3 i 5 respectivament. Quins són els primer i l'últim? Quants n'hi ha en total?

5.–Sigui ABC un triangle acutangle. Sobre cadascun dels seus costats es construeix un quadrat cap a l'exterior del triangle que té per costat el corresponent costat del triangle. Siguin P_A, P_B i P_C els centres d'aquests quadrats. Demostreu que

$$\text{Àrea}\,[P_AP_BP_C] = \text{Àrea}\,[ABC] + \frac{a^2+b^2+c^2}{8},$$

on a, b i c són les longituds del costats del triangle ABC.

6.–Digueu per quins valors de $\gamma \in (0,1]$ és certa, per a qualsevol parella de nombres reals positius a i b, la desigualtat següent:

$$\gamma\sqrt{ab} + (1-\gamma)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

Sigui $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n, el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.

Solució.

Progressions amb diferència 1: $1, 2, 3;\ 2, 3, 4;\ \dots\ ; n-2, n-1, n$. En total n'hi ha $n-2$.

Progressions amb diferència 2: $1, 3, 5;\ 2, 4, 6;\ 3, 5, 7;\ \dots\ ; n-4, n-2, n$. En total n'hi ha $n-4$. I així successivament. El total de progressions serà

$$S = (n-2) + (n-4) + \cdots + u$$

on u és 2 o 1 segons la paritat de n. Ara distingim dos casos:
a) Cas parell, $n = 2k$. Llavors el nombre de progressions és

$$S = (2k-2) + (2k-4) + \cdots + 2 = 2\big((k-1) + \cdots + 1\big) = k(k-1) = \frac{n(n-2)}{4}$$

b) Cas imparell, $n = 2k-1$. Ara el nombre de progressions és

$$S = (2k-3) + (2k-5) + \cdots + 1 = (k-1)^2 = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Problema 2.

Trobeu totes les solucions reals del sistema d'equacions:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+y^2+6x+9} + \sqrt{x^2+y^2-8y+16} & = & 5, \\ 9y^2 - 4x^2 & = & 60. \end{array} \right.$$

Solució.

Primer observem que els punts (x, y) que compleixen la primera equació són aquells que la suma de les seves distàncies a $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$ és igual a 5. A més, si un punt P està fora del segment AB llavors $AP + PB > AB = 5$. Això ens permet concloure que els punts (x, y) solució del sistema han d'estar en el segment AB. L'equació de AB és $y = \dfrac{4}{3}\,x + 4$ amb $-3 \le x \le 0$. Substituint aquests valors a la segona equació, resulta

$$9\left(\frac{4}{3}\,x + 4\right)^2 - 4x^2 = 60 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

que té per arrels $x = -7$ y $x = -1$. Només la segona és a l'interval $[-3, 0]$ i l'única solució del sistema inicial és $(-1, 8/3)$.

Problema 3.

Siguin H_B i H_C els peus de les altures del triangle ABC corresponents als vèrtexs B i C respectivament. Sigui Γ la circumferència que passa per A, H'_B, H'_C, on H'_B és el simètric del punt H_B respecte del punt mitjà del costat AC, i H'_C és el simètric del punt H_C respecte del punt mitjà del costat AB.

a) Demostreu que si Γ és tangent al costat BC, llavors el punt de tangència és el punt mitjà del costat BC.

b) Doneu una condició en funció de les longituds a, b, c dels costats del triangle per tal que es doni aquesta situació de tangència.

Solució.

Calculem en primer lloc les potències de B i C respecte de la circumferència Γ. La del punt B és $BA \cdot BH'_C = BA \cdot AH_C = BA \cdot AC \cos A = b\,c \cos A$. Anàlogament, la del punt C és $CA \cdot CH'_B = CA \cdot AH_B = CA \cdot AB \cos A = c\,b \cos A$. Les dues potències són iguals i això ens diu que B i C equidisten del centre O de Γ. Aquest centre està situat, doncs, sobre la mediatriu de BC.

a) Pel que s'ha dit abans, si la circumferència talla la recta BC, els punts d'intersecció X_1 i X_2 han de ser equidistants del punt mitjà X del segment BC. Si hi ha tangència, haurà de ser $X_1 = X_2 = X$.

b) Suposem que hi hagi tangència. Aleshores la potència comuna de B i C respecte de la circumferència serà també $BX^2 = \dfrac{a^2}{4}$. Tindrem

$$\frac{a^2}{4} = b\,c \cos A \quad \text{o bé,} \quad a^2 = 4b\,c \cos A.$$

i, si substituïm $\cos A$ pel seu valor obtingut del teorema del cosinus, queda

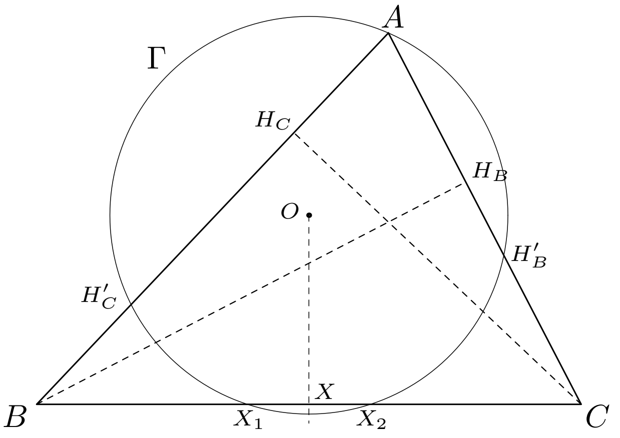
$$a^2 = 4b\,c \cos A = 2(b^2 + c^2 - a^2) \;\; \text{i, definitivament,} \quad 3a^2 = 2(b^2 + c^2)$$

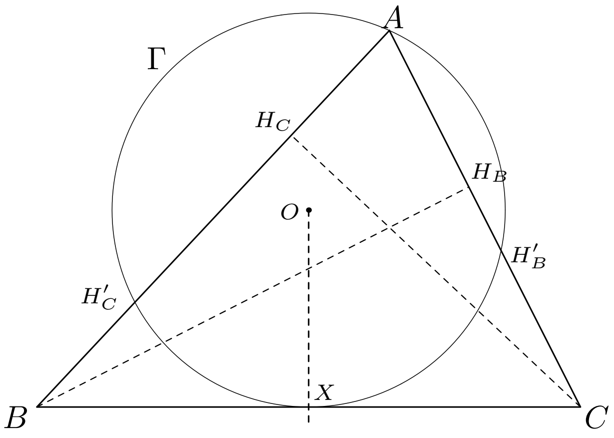
que és la condició buscada.

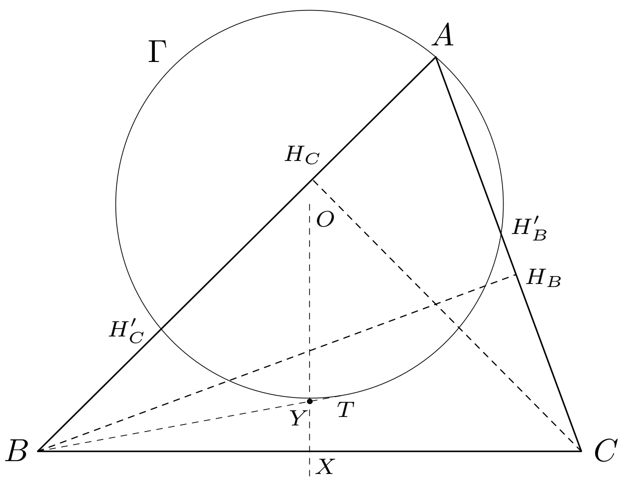
Hem de demostrar que aquesta condició implica la tangència de Γ i BC. La igualtat $3a^2 = 2(b^2 + c^2)$, després de substituir $b^2 + c^2$ pel seu valor obtingut del teorema del cosinus, dóna lloc a la igualtat $a^2 = 4b\,c \cos A$, és a dir, que BX^2 és la potència de B i C respecte de la circumferència, que també és $BX_1 \cdot BX_2$. Podem escriure, doncs, $\dfrac{a^2}{4} = BX_1 \cdot BX_2 = (BX - XX_1)(BX + XX_2)$ o bé $\dfrac{a^2}{4} = \left(\dfrac{a}{2} - XX_1\right)\left(\dfrac{a}{2} + XX_2\right)$ i com que $XX_1 = XX_2$, calculant surt que $XX_1 = 0$. La conclusió és que si la circumferència talla BC, aleshores ha de ser tangent.

Ens queda per veure que no és possible que Γ no talli el costat BC. Si fos així, la circumferència estaria tota situada al semiplà superior determinat per BC i la tangent traçada des de B tindria punt de tangència T situat a la dreta de la mediatriu OX (vegeu la figura). Aleshores $BT > BY > BX$. Però BT^2 és la potència de B respecte de Γ, i si es compleix la condició $3a^2 = 2(b^2 + c^2)$ també ho és BX^2. I no pot ser

$BX^2 = BT^2$ si $BT > BX$ estrictament.







Problema 4.

Busqueu els nombres enters positius n menors de 201314 tals que en dividir 3^n i 5^n per 13 donin residus 3 i 5 respectivament. Quins són els primer i l'últim? Quants n'hi ha en total?

Solució.

Les potències de 3 en dividir-les per 13 donen de residu un cicle d'ordre 3: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 1$, etc. Anàlogament, les potències de 5 donen un cicle d'ordre 4: $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 12$, $5^3 = 8$, $5^4 = 1$, etc.
Els n que busquem són doncs del tipus $n = 3k + 1$ i a la vegada $n = 4h + 1$. Per tant, $n - 1$ ha de ser múltiple de 3 i 4 a la vegada, és a dir, múltiple de 12: $n = 12k + 1$. Les condicions de l'enunciat diuen $1 \leq 12k + 1 \leq 201314$ i per tant $0 \leq k \leq \dfrac{201313}{12}$ o bé $0 \leq k \leq 16776,08$. El primer, per a $k = 0$ és 1. L'últim, per a $k = 16776$, és 201313 i el nombre total és 16776+1=16777.

Problema 5.

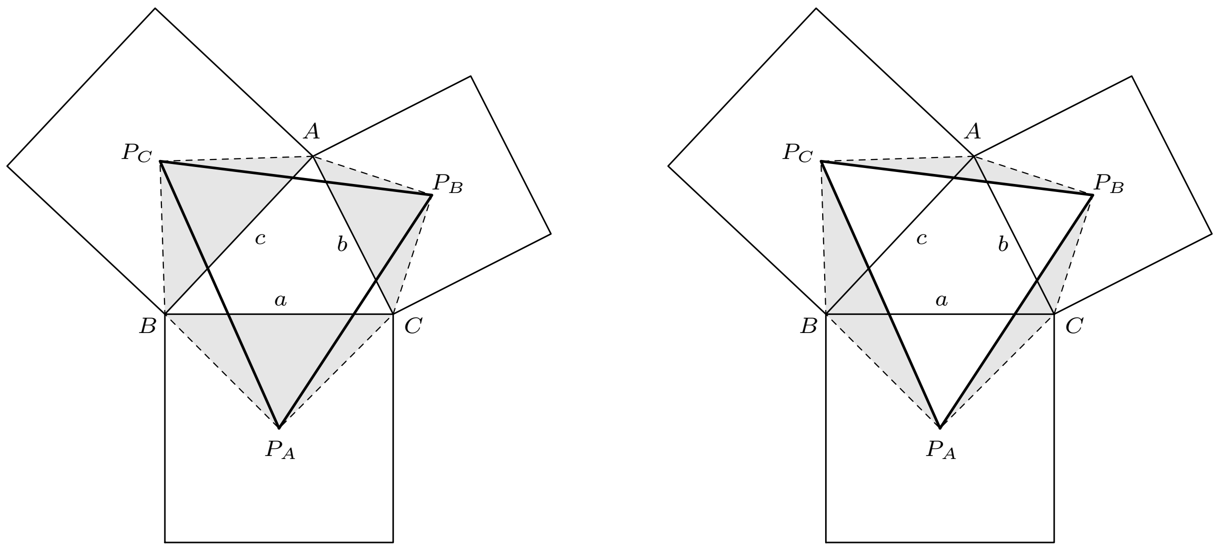
Sigui ABC un triangle acutangle. Sobre cadascun dels seus costats es construeix un quadrat cap a l'exterior del triangle que té per costat el corresponent costat del triangle. Siguin P_A, P_B i P_C els centres d'aquests quadrats. Demostreu que

$$\text{Àrea}\,[P_AP_BP_C] = \text{Àrea}\,[ABC] + \frac{a^2+b^2+c^2}{8},$$

on a, b i c són les longituds del costats del triangle ABC.

Solució.

L'hexàgon A, P_C, B, P_A, C, P_B té costats que mesuren la meitat de les diagonals dels quadrats. Els sis angles són 90° als vèrtexs P_A, P_B i P_C i $90° + A$, $90° + B$ i $90° + C$ als respectius vèrtexs A, B i C. Com que el triangle és acutangle, tots aquests angles són menors que 180° i, per tant, l'hexàgon és convex. El triangle $P_AP_BP_C$ és interior a l'hexàgon.



A la figura de l'esquerra veiem que l'àrea de l'hexàgon és l'àrea del triangle ABC més la suma de les quartes parts de les àrees dels tres quadrats.

$$\text{Àrea hexàgon} = \text{Àrea}[ABC] + \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

A la figura de la dreta veiem que l'àrea de l'hexàgon és l'àrea del triangle $P_AP_BP_C$ més la suma de les àrees dels tres triangles grisos AP_CP_B, BP_AP_C, CP_BP_A.

$$\text{Àrea hexàgon} = \text{Àrea}[P_AP_BP_C] + \text{Àrea}[AP_CP_B] + \text{Àrea}[BP_AP_C] + \text{Àrea}[CP_BP_A].$$

Per calcular l'àrea d'aquests últims triangles, per exemple AP_CP_B, calculem la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen

$$\text{Àrea}[AP_CP_B] = \frac{1}{2}\frac{b\sqrt{2}}{2}\frac{c\sqrt{2}}{2}\sin(A+90°) = \frac{1}{4}b\,c\cos A = \frac{1}{8}(b^2+c^2-a^2),$$

on la darrera igualtat s'ha obtingut substituint $2b\,c\cos A$ per $b^2+c^2-a^2$ del teorema del cosinus. En resum,

$$\begin{aligned}\text{Àrea hexàgon} = \text{Àrea}[P_AP_BP_C] + \frac{1}{8}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{8}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2) = \\ = \text{Àrea}[P_AP_BP_C] + \frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Si igualem l'àrea de l'hexàgon obtinguda de les dues maneres ens queda, finalment,

$$\text{Àrea}\,[P_AP_BP_C] = \text{Àrea}\,[ABC] + \frac{a^2+b^2+c^2}{8},$$

Problema 6.

Digueu per quins valors de $\gamma \in (0,1]$ és certa, per a qualsevol parella de nombres reals positius a i b, la desigualtat següent:

$$\gamma\sqrt{ab} + (1-\gamma)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \frac{a+b}{2}.$$

Primera solució.

Dividint per $a+b$ i multiplicant per $\sqrt{2}$ s'obté

$$\gamma\sqrt{2\frac{ab}{(a+b)^2}} + (1-\gamma)\sqrt{1-2\frac{ab}{(a+b)^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Posem $t^2 = \dfrac{2ab}{(a+b)^2}$, que és un nombre real positiu de l'interval $(0,1/2]$ (usant $MG \le MQ$). Per tant $t \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ i podem dir $t = \sin\theta$, amb $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$.
Ara només cal trobar el màxim de la funció

$$f(\theta) = \gamma\sin\theta + (1-\gamma)\cos\theta$$

a l'interval $(0, \frac{\pi}{4}]$ i imposar que no superi $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per trobar aquest màxim fàcilment podem raonar que $f(\theta)$ és el producte escalar del vector $v = (\gamma, 1-\gamma)$ per un vector de mòdul 1 i per tant sabem que $f(\theta)$ té un únic màxim a $(0, 2\pi]$ que s'obté quan $(\sin\theta, \cos\theta)$ té la mateixa direcció i sentit que v. És a dir, quan

$$(\sin\theta, \cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2+(1-\gamma)^2}}(\gamma, 1-\gamma).$$

Hem de mirar, doncs, si es pot donar

$$\tan\theta = \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

tenint en compte que $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Això implica

$$0 < \frac{\gamma}{1-\gamma} < 1,$$

equivalentment $0 < \gamma < 1/2$.
Per tant, quan $\gamma \in (0, 1/2)$ la funció $f(\theta)$ té un màxim interior (i absolut) en $(0, \frac{\pi}{4}]$ i el valor de f en aquest màxim és

$$\sqrt{\gamma^2 + (1-\gamma)^2} > \frac{\gamma + (1-\gamma)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

on hem usat $MQ > MA$ llevat que els dos nombres siguin iguals. En canvi per $\gamma \in [1/2, 1]$ el màxim s'assoleix en l'extrem $\theta = \pi/4$, on f val precisament $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En conseqüència, la desigualtat val si, i només si, $\gamma \in [1/2, 1]$.

Segona solució. (Xavier Ros)

Recordem que la següent desigualtat és certa per tots els nombres reals positius a, b

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{1}$$

La quantitat de l'esquerra s'anomena mitjana geomètrica dels nombres a i b, la del mig és la mitjana aritmètica, i la de la dreta és la mitjana quadràtica.
Per a resoldre el problema, definim

$$x\sqrt{ab} \quad \text{i} \quad y = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Aleshores, tindrem que

$$x^2 + y^2 = ab + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2},$$

i per tant,

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Per tant, la desigualtat de l'enunciat és equivalent a

$$\gamma x + (1-\gamma)y \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \tag{2}$$

on x i y són nombres reals positius. Notem que, a més, per (1) sabem que $x \leq y$.
Ara, aplicant (1) als nombres x i y, tindrem que es compleix

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

i per tant (2) és certa per $\gamma = \frac{1}{2}$.
Com que $x \le y$, aleshores (2) serà certa també per a tot $\gamma \ge \frac{1}{2}$, i per tant la desigualtat de l'enunciat és certa per tot $\gamma \ge \frac{1}{2}$.
A continuació demostrarem que, de fet, per $\gamma < \frac{1}{2}$ la desigualtat de l'enunciat no és certa. Com que la desigualtat de l'enunciat és equivalent a la desigualtat (2), només ens cal veure que no ho és la desigualtat (2).
Suposarem que (2) és certa per algun $\gamma < 1/2$ i arribarem a una contradicció. Si fos així, la podem aplicar als nombres $x = 1 - \epsilon$ i $y = 1 + \epsilon$, on $\epsilon > 0$ és un nombre prou petit. Aleshores, (2) ens diu que

$$\gamma\,(1-\epsilon) + (1-\gamma)(1+\epsilon) \le \sqrt{\frac{(1-\epsilon)^2 + (1+\epsilon)^2}{2}},$$

i reagrupant els termes veiem que aquesta desigualtat és equivalent a

$$1 + (1-2\gamma)\epsilon \le \sqrt{1+\epsilon^2}.$$

Ara, és clar també que aquesta desigualtat és equivalent a

$$(1-2\gamma)\epsilon \le \sqrt{1+\epsilon^2} - 1 = \frac{\epsilon^2}{1+\sqrt{1+\epsilon^2}},$$

i simplificant, tindrem

$$(1-2\gamma) \le \frac{\epsilon}{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}.$$

Finalment, notem que com que $\gamma < 1/2$ aleshores el costat esquerra de la desigualtat és un nombre positiu fixat (que no depen de ϵ). En canvi, $\epsilon > 0$ el podem fer tant petit com volguem, i així el costat dret de la desigualtat es farà tant petit com volguem, i en particular, el podem fer més petit que $(1 - 2\gamma)$. Per tant, hem arribat a una contradicció, tal com volíem.