LI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

12 i 13 de desembre de 2014

Enunciats

L OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

12 de desembre de 2014, de 16 a 19.30 h.

1.–En Marc i la Clara han comprat una bossa de patates i volen repartir-se-les. La bossa és de 900 grams i cap de les patates pesa més de 450 grams. Demostreu que és possible repartir totes les patates de la bossa entre en Marc i la Clara de tal manera que o bé tots dos rebin el mateix pes, o bé que el qui rep més pes, en rebi com a molt 300 grams més que l'altre.

2.–Trobeu totes les ternes de nombres reals x, y, z, tots tres diferents de zero, que satisfan les equacions

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\left(\frac{1}{6}\right)^2,$$
$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=\left(\frac{7}{6}\right)^2,$$
$$\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{z^2x^2}=\left(\frac{7}{36}\right)^2.$$

3.–Per a cada enter positiu $n \geq 1$ denotem $a_n = n^4 + n^2 + 1$. Calculeu el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1} en funció de n.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

L OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

13 de desembre de 2014, de 9.30 a 13 h.

4.–Considerem un rectangle format per $2 \times n$ quadrats, distribuïts en n columnes de dos quadrats cadascuna. Disposem de tres colors per a pintar els quadrats, i volem fer-ho de tal manera que no hi hagi dos quadrats que comparteixin un costat i que tinguin el mateix color. De quantes maneres diferents ho podem fer?

5.–Siguin A, B, C, D quatre punts diferents d'una circumferència Γ. Suposem que els segments AC i BD s'intersequen en un punt E. Suposem també que els segments AB, BC i CD tenen la mateixa longitud. Triem punts F i G tals que $BECF$ i $BDCG$ siguin paral·lelograms. Demostreu que els segments AF i DG s'intersequen en un punt de Γ.

6.–Considerem un conjunt $\mathcal{S}$ de n rectes diferents del pla, on $n > 3$. Suposem que $\mathcal{S}$ no conté cap parell de rectes paral·leles. Sigui $\mathcal{X}$ el conjunt dels punts del pla que pertanyen a dues o més rectes de $\mathcal{S}$. Suposem que per a tot punt $p \in \mathcal{X}$ la quantitat de rectes de $\mathcal{S}$ que passen per p és com a molt $n/2$. Demostreu que el nombre d'elements de $\mathcal{X}$ és més gran o igual que $n/2$.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

En Marc i la Clara han comprat una bossa de patates i volen repartir-se-les. La bossa és de 900 grams i cap de les patates pesa més de 450 grams. Demostreu que és possible repartir totes les patates de la bossa entre en Marc i la Clara de tal manera que o bé tots dos rebin el mateix pes, o bé que el qui rep més pes, en rebi com a molt 300 grams més que l'altre.

Solució.

Si partim 900 en dues parts, x i $900 - x$, la condició que ens demanen és

$$|(900 - x) - x| \leq 300.$$

Aquesta condició és equivalent a $-300 \leq 900 - 2x \leq 300$ que també és equivalent a $300 \leq x \leq 600$. El nostre problema és, doncs, equivalent a veure que podem fer una part de patates que tinguin pes x entre 300 g i 600 g.
Ordenem les patates per pes de més gran a més petit. Si la primera patata pesa més de 300 g, la donem al Marc (x) i la resta a la Clara ($900 - x$) i hem acabat. En cas contrari totes les patates pesen menys de 300 g. Anem donant al Marc patates, de més gran a més petita, fins just passar (o igualar) els 300 g (x). Les patates del Marc passen o igualen els 300 g però no arriben als 600, ja que totes les patates són de pes inferior a 300 g. Hem acabat, donant a la Clara les altres patates ($900 - x$).

Problema 2.

Trobeu totes les ternes de nombres reals x, y, z, tots tres diferents de zero, que satisfan les equacions

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \left(\frac{1}{6}\right)^2,$$
$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} = \left(\frac{7}{6}\right)^2,$$
$$\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2} = \left(\frac{7}{36}\right)^2.$$

Solució 1.

Multiplicant les dues primeres equacions per xyz i la tercera per $x^2y^2z^2$, obtenim

$$x + y + z = \frac{xyz}{36},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{49\,xyz}{36},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{49\,x^2y^2z^2}{36^2}.$$

Les dues últimes equacions impliquen que $xyz = 36$, i de fet el sistema és equivalent a

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49, \\ xyz &= 36. \end{aligned}$$

De la igualtat $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ deduïm $1 = 49+2(xy+yz+zx)$, que implica $xy + yz + zx = -24$. Per tant, el sistema precedent és equivalent a

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ xy + yz + zx &= -24, \\ xyz &= 36. \end{aligned}$$

Les solucions (x, y, z) de l'últim sistema satisfan $t^3 - t^2 - 24t - 36 = (t - x)(t - y)(t - z)$, per les fórmules de Cardano-Viète. Observant la factorització $t^3 - t^2 - 24t - 36 = (t - 6)(t + 2)(t + 3)$ arribem a la conclusió que la terna $(x, y, z) = (6, -2, -3)$ és solució del sistema proposat, i que totes les altres solucions en són permutacions.

Solució 2. (del concursant Joan Ariño)

Com abans, s'arriba a

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ xy + yz + zx &= -24, \\ xyz &= 36, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49. \end{aligned}$$

Com que el sistema és cíclic podem ordenar les incògnites de forma $x \geq y \geq z$. Per la segona equació del sistema, almenys una de les incògnites ha de ser negativa, però llavors per la tercera exactament dues incògnites ho són. A més per la quarta equació els valors de les incògnites han de situar-se entre 7 i -7, per tant: $7 > x > 0 > y \geq z > -7$. En aquest punt buscant la existència de solucions enteres i per tant comprovant els divisors de 36 menors que 7 trobem que $x = 6$, $y = -2$, $z = -3$ són solucions.
Ara queda per comprovar la inexistència de cap altra solució. Per fer-ho veurem que $x > 6$ i que $x < 6$ ens fan arribar a una contradicció.
a) Cas $x > 6$.
Per la primera equació sabem que $y + z < -5$ i per tant $(y + z)^2 > 25$. Per la tercera que $yz < 6$ i per la quarta que $y^2 + z^2 < 13$. De forma que calculant $y^2 + 2yz + z^2$ partint de les dues equacions anteriors arribem a la contradicció $25 > 25$ si $x > 6$.
b) Cas $x < 6$.
Ho fem per un procediment anàleg a l'anterior. Per la primera equació $(y + z)^2 < 25$. Però per la tercera i la quarta $yz > 6$ i $y^2+z^2 > 13$. Arribem igualment a la contradicció $25 > 25$ si $x < 6$.
Per tant l'única solució al sistema és $x = 6$, $y = -2$ $z = -3$ i les seves permutacions.

Problema 3.

Per a cada enter positiu $n \geq 1$ denotem $a_n = n^4 + n^2 + 1$. Calculeu el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1} en funció de n.

Solució.

Denotem per d_n el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1}. Observem que

$$a_n = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = \left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right)$$

i, d'altra banda,

$$(n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+n+1, \qquad (n+1)^2+(n+1)+1 = n^2+3n+3.$$

Per tant

$$a_{n+1} = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2+3n+3\right),$$

cosa que implica que $d_n = e_n\left(n^2+n+1\right)$, on e_n és màxim comú divisor de n^2-n+1 i de n^2+3n+3. Ara bé, n^2-n+1 és senar, ja que $n^2-n = n(n-1)$ és el producte de dos enters consecutius, i per tant és parell. D'aquí que n^2-n+1 i e_n siguin ambdós senars. Ara, la igualtat

$$n^2+3n+3-\left(n^2-n+1\right) = 4n+2 = 2(2n+1),$$

implica que $e_n|(2n+1)$, per ser e_n senar. Aleshores també tenim

$$e_n|4\left(n^2-n+1\right)-(2n-3)(2n+1) = 7.$$

Com que 7 és primer, resulta que e_n és 1 o 7. Quan $7|2n+1$ aleshores $7|e_n$ i per tant $e_n = 7$ en aquest cas. Com que $e_n|2n+1$, es conclou que $e_n = 7$ exactament quan $7|2n+1$. Resumint:

- $d_n = 7\left(n^2+n+1\right)$ quan n dóna residu 3 en dividir-lo entre 7.
- $d_n = n^2+n+1$ quan n no dóna residu 3 en dividir-lo entre 7.

Problema 4.

Considerem un rectangle format per $2\times n$ quadrats, distribuïts en n columnes de dos quadrats cadascuna. Disposem de tres colors per a pintar els quadrats, i volem fer-ho de tal manera que no hi hagi dos quadrats que comparteixin un costat i que tinguin el mateix color. De quantes maneres diferents ho podem fer?

Solució.

Anomenem coloració admissible qualsevol coloració que satisfaci les condicions indicades a l'enunciat. Donat $n \geq 1$ denotem per a_n el nombre de coloracions admissibles d'un rectangle de mida $2\times n$. Fixem $n \geq 1$. Qualsevol coloració admissible d'un rectangle de mida $2\times(n+1)$ s'obté a partir d'una coloració admissible del rectangle $2\times n$ corresponent a les n primeres columnes completant amb una tria adequada de colors els quadrats de la darrera columna. Suposem triada una coloració admissible del rectangle format per les primeres n columnes. Denotem per x, y, z els tres colors a la nostra disposició. Si x, y són els colors dels quadres superior i inferior (respectivament) de la columna a la posició n, aleshores hi ha exactament tres tries corresponents als colors dels quadrats (superior,inferior) de l'última columna, donades pels parells (y, x), (y, z) i (z, x). Permutant els símbols x, y, z deduïm que el nombre de tries per a l'última columna no depèn de la coloració del rectangle de mida $2 \times n$ que hem fixat al principi. Per tant, $a_{n+1} = 3a_n$. Finalment, com que $a_1 = 6$, resulta que $a_n = 2 \cdot 3^n$.

Problema 5.

Siguin A, B, C, D quatre punts diferents d'una circumferència Γ. Suposem que els segments AC i BD s'intersequen en un punt E. Suposem també que els segments AB, BC i CD tenen la mateixa longitud. Triem punts F i G tals que $BECF$ i $BDCG$ siguin paral·lelograms. Demostreu que els segments AF i DG s'intersequen en un punt de Γ.

Solució.

Observem la figura de l'esquerra. Els angles α són tots iguals, ja que són inscrits a Γ i veuen cordes de la mateixa longitud. Els angles α' són iguals als α pel paral·lelisme dels costats (per construció). Anàlogament, els angles β són iguals ja que són inscrits i veuen la mateixa corda AD. L'angle β' és igual al β per paral·lelisme. A partir d'ara podem suprimir les *primes* dels angles.

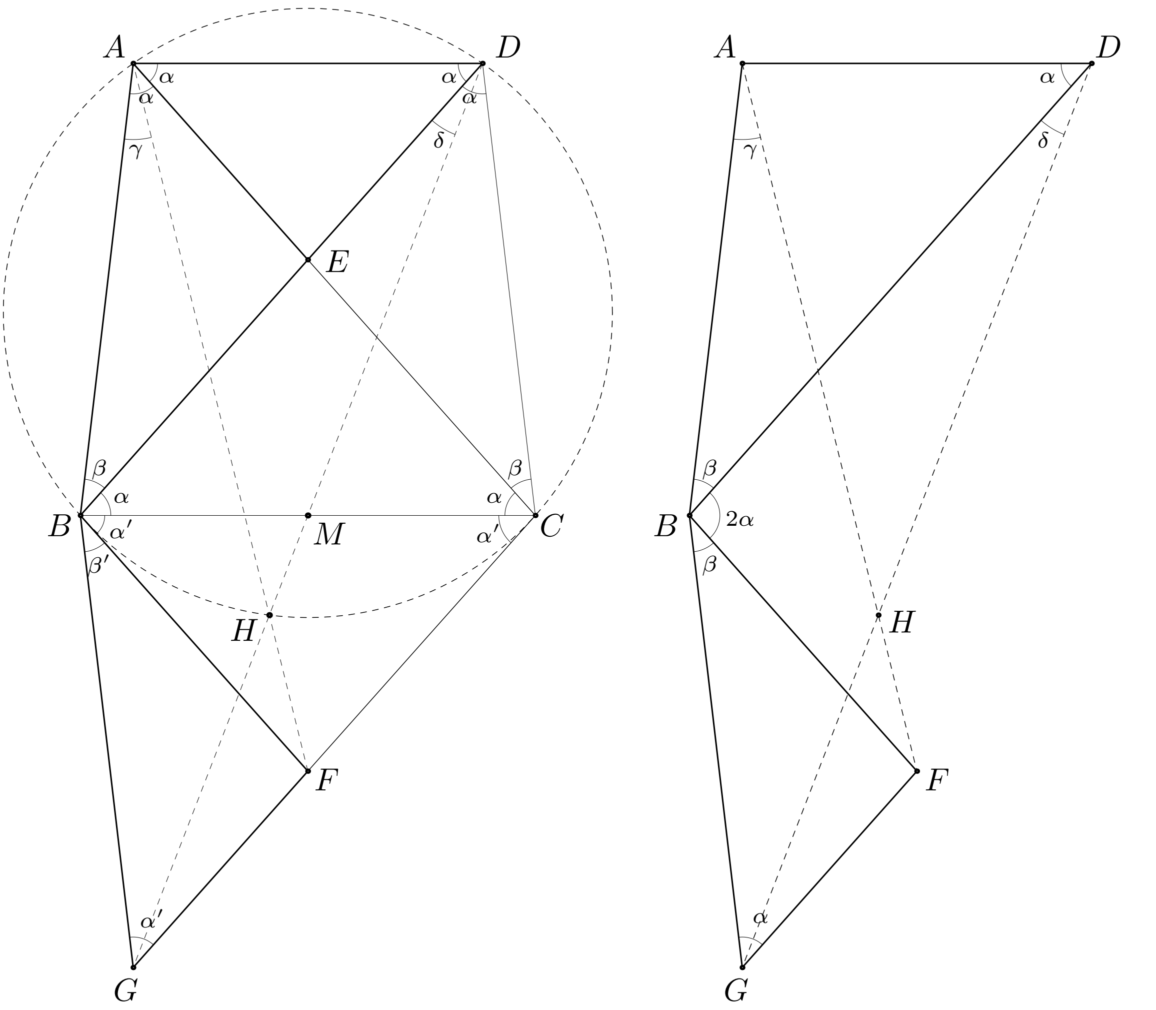
La resolució del problema és equivalent a veure que els angles denotats per γ i δ són iguals.

El punt M és el punt mitjà de BC ja que és el punt on es tallen les diagonals dels paral·lelògrams $BECF$ i $BDCG$. Els triangles BGF, CDE i BAE són iguals (congruents) ja que el primer i el segon són simètrics respecte de M i el segon i el tercer són simètrics respecte de la mediatriu del segment BC.

Mirem ara els triangles BEA i BAD de vèrtex comú B. Tenen dos angles iguals, senyalats amb β (angle comú) i α. En conclusió, els triangles (figura de la dreta) BAD i BFG són semblants.

La relació de semblança $\dfrac{AB}{FB} = \dfrac{DB}{GB}$ ens diu que també són semblants els dos triangles BAF i BDG ja que tenen l'angle $(2\alpha + \beta)$ del vèrtex B iguals. Per tant els angles γ i

δ són iguals i hem acabat.



Problema 6.

Considerem un conjunt $\mathcal{S}$ de n rectes diferents del pla, on $n > 3$. Suposem que $\mathcal{S}$ no conté cap parell de rectes paral·leles. Sigui $\mathcal{X}$ el conjunt dels punts del pla que pertanyen a dues o més rectes de $\mathcal{S}$. Suposem que per a tot punt $p \in \mathcal{X}$ la quantitat de rectes de $\mathcal{S}$ que passen per p és com a molt $n/2$. Demostreu que el nombre d'elements de $\mathcal{X}$ és més gran o igual que $n/2$.

Solució.

Per a cada punt $p \in \mathcal{X}$ denotem per δ_p el nombre de rectes de $\mathcal{S}$ que passen per p.
Per una banda, per a dos punts diferents $p, q \in \mathcal{X}$ tenim

$$|\mathcal{X}| \geq (\delta_p - 1)(\delta_q - 1) + 2. \tag{1}$$

D'altra banda, com que dues rectes no paral·leles i diferents del pla s'intersecten en exactament un punt, fent un doble compteig dels parells de rectes diferents de $\mathcal{S}$ obtenim (podem pensar-ho com si moguéssim molt poc totes les rectes, de manera que un punt p per on hi passaven δ_p rectes es converteix en $\binom{\delta_p}{2}$ punts diferents).

$$\binom{n}{2} = \sum_{p \in \mathcal{X}} \binom{\delta_p}{2} \tag{2}$$

La conclusió s'obté considerant dos casos.
a) Si existeixen dos punts diferents $p, q \in \mathcal{X}$ tals que $\delta_p, \delta_q \geq \sqrt{n}$ aleshores, per (1), es satisfà la desigualtat

$$|X| \geq (\sqrt{n} - 1)^2 + 2 = n - 2\sqrt{n} + 3 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}((\sqrt{n} - 2)^2 + 2) \geq \frac{n}{2},$$

i ja hem acabat.

b) En cas contrari, hi ha com a màxim un punt p amb $\delta_p \geq \sqrt{n}$ el màxim dels valors δ_p per a $p \in \mathcal{X}$ és com a molt $\lfloor n/2 \rfloor$, mentre que la resta de valors són com a molt $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Per tant:

$$\sum_{r \in \mathcal{X}} \binom{\delta_r}{2} = \binom{\delta_p}{2} + \sum_{q \neq p} \binom{\delta_q}{2} \leq \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2} + (|\mathcal{X}| - 1)\binom{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2} \leq \frac{n^2}{4} + (|\mathcal{X}| - 1)\frac{n}{2}$$

i utilitzant (2) deduïm:

$$|\mathcal{X}| \geq \frac{\binom{n}{2} - \frac{n^2}{4}}{\frac{n}{2}} + 1 = \frac{n}{2}$$

En resum, $|\mathcal{X}| \geq n/2$ en els dos casos possibles, i per tant l'enunciat queda demostrat. (Si no hi hagués cap punt p que complís la condició $\delta_p \geq \sqrt{n}$, aleshores en triariem un d'arbitrari que fes les funcions de p en el raonament anterior.)