LIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 i 17 de desembre de 2016

Enunciats

LIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

16 de desembre de 2016, de 16 a 19.30 h.

1.–De quantes maneres diferents es pot expressar el nombre $n = 3499200$ com a producte de tres factors enters positius? Les representacions que es diferencïin en l'ordre dels factors es consideraran diferents.

2.–Siguin a, b, c, d nombres reals donats amb c i d positius, i siguin x, y nombres reals tals que $0 \leq x \leq c$, i $0 \leq y \leq d$. Trobeu els valors de x, y que fan mínima l'expressió

$$\sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d-y)^2}.$$

3.–Donat un triangle ABC considerem un punt D del segment AC tal que $DC = 2\,AD$. Sigui I el centre de la circumferència inscrita al triangle BDC i sigui E el punt de tangència d'aquesta circumferència amb el costat BD. Si $BD = BC$, demostreu que les rectes AE i DI són paral·leles.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

LIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

17 de desembre de 2016, de 9.30 a 13 h.

4.–Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex (amb els vèrtexs ordenats en sentit antihorari).

Dividim el costat AB en $n > 1$ parts iguals mitjançant els punts $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ (situats de $A = X_0$ a $B = X_n$, essent X_1 el més pròxim a A) i dividim el costat CD en n parts iguals mitjançant els punts $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ (situats de $D = Y_0$ a $C = Y_n$, essent Y_1 el més pròxim a D).

Considerem els segments X_iY_i i el segment PQ, on P és el punt mitjà del segment AD i Q és el punt mitjà del segment BC. Denotem Z_i el punt d'intersecció de PQ amb X_iY_i, $i = 1, \ldots, n-1$, amb $P = Z_0$ i $Q = Z_n$.

Considerem els $2n$ quadrilàters

$$X_iX_{i+1}Z_{i+1}Z_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$Z_iZ_{i+1}Y_{i+1}Y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demostreu que la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs A i C és igual a la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs B i D.

5.–Siguin OA, OB dos radis d'una circumferència de centre O. Des d'un punt P d'aquesta circumferència es tracen perpendiculars a les rectes OA i OB. Siguin R, S els peus d'aquestes perpendiculars. Demostreu que la distància RS no depèn de la posició del punt P sobre la circumferència.

6.–Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt dels nombres enters positius n tals que

$$n \mid 2^n + 1$$

(Equivalentment, que $2^n + 1$ és múltiple de n).

a) Demostreu que per a tot nombre enter $k \geq 0$, 3^k pertany a $\mathcal{A}$.

b) Quins nombres primers pertanyen a $\mathcal{A}$?

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

De quantes maneres diferents es pot expressar el nombre $n = 3499200$ com a producte de tres factors enters positius? Les representacions que es diferenciïn en l'ordre dels factors es consideraran diferents.

Solució.

Tenim $n = 3\,499\,200 = 2^6\, 3^7\, 5^2$, de manera que qualsevol descomposició de n en tres factors serà de la forma

$$n = \left(2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}\right) \left(2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}\right) \left(2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}\right)$$

amb els α_i, β_j i γ_k enters no negatius tals que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 7$ i $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2$.
El nombre de solucions diferents (comptant l'ordre) de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ (on els x_i i r son enters no negatius) és es

$$\binom{r+k-1}{k-1} = \binom{r+k-1}{r}$$

d'on resulta que el resultat del nostre problema és

$$\binom{3+6-1}{3-1}\binom{3+7-1}{3-1}\binom{3+2-1}{3-1} = \binom{8}{2}\binom{9}{2}\binom{4}{2} = 6048.$$

Problema 2.

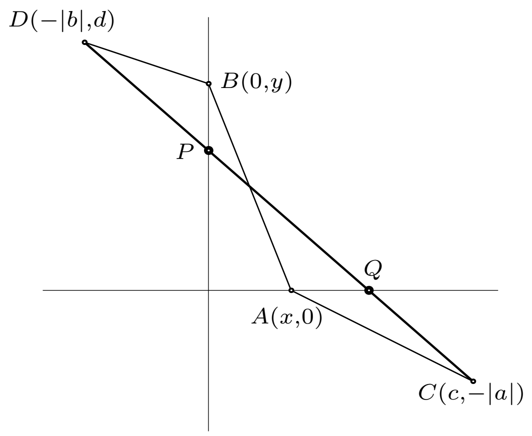
Siguin a, b, c, d nombres reals donats amb c i d positius, i siguin x, y nombres reals positius tals que $0 \le x \le c$, i $0 \le y \le d$. Trobeu els valors de x, y que fan mínima l'expressió

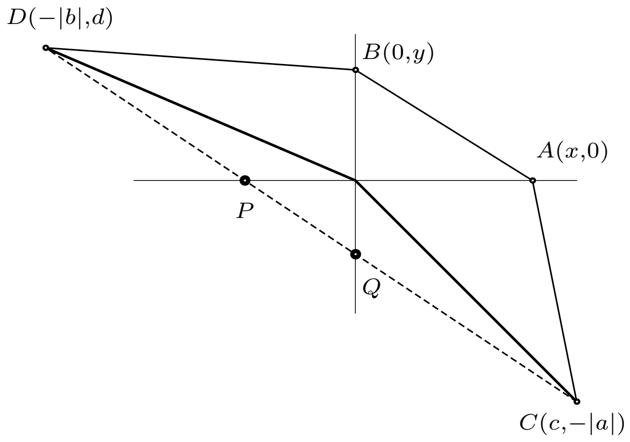
$$\sqrt{a^2 + (c - x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d - y)^2}.$$

Solució.

Considerem en el pla els punts següents: $A(x, 0)$, $B(0, y)$, $C(c, -|a|)$, $D(-|b|, d)$. La figura mostra que

$$d(D, B) + d(B, A) + d(A, C) \ge d(D, C).$$





El mínim de la suma tindrà lloc si i només si A, B, C i D estan alineats. Això implica que A ha de ser el punt Q i B el punt P. Les coordenades d'aquests punts s'obtenen tallant la recta CD amb els eixos i queda (figura de l'esquerra)

$$x = \frac{dc - |ab|}{|a| + d}, \quad y = \frac{dc - |ab|}{c + |b|}.$$

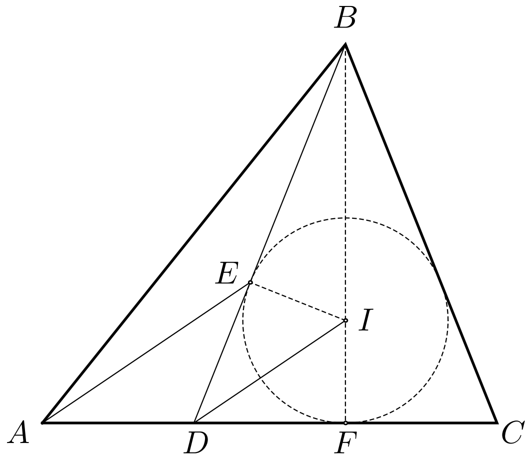
Si fos $dc - |ab| < 0$, aleshores x i y serien negatives (figura de la dreta) i la mínima distància s'obtindria "passant per l'origen", és a dir, fent $x = 0$ i $y = 0$.

(*Observació:* En alguns enunciats hi havia les condicions $0 < x \le c$, i $0 < y \le d$. En aquest cas, si $dc - |ab| < 0$, no hi ha mínim, però si *ínfim* o *extrem inferior* que també és $x = 0$ i $y = 0$.)

Problema 3.

Donat un triangle ABC considerem un punt D del segment AC tal que $DC = 2AD$. Sigui I el centre de la circumferència inscrita al triangle BDC i sigui E el punt de tangència d'aquesta circumferència amb el costat BD. Si $BD = BC$, demostreu que les rectes AE i DI són paral·leles.

Solució.



El triangle BDC és isòsceles, i per tant $I \in BF$ i $IF \perp DC$.
En conseqüència, ED i DF són tangents al cercle inscrit a BDC, i $ED = DF = AD$.
D'altra banda, donat que I és l'incentre de BDC, DI és la bisectriu de $\widehat{EDF}$. És a dir,

$$\widehat{IDF} = \frac{1}{2}\widehat{EDF}.$$

De $AD = DE$ obtenim

$$\widehat{EAD} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{EDF} = \widehat{IDF}$$

i d'aquí resulta que AE és paral·lel a DI.

Problema 4.

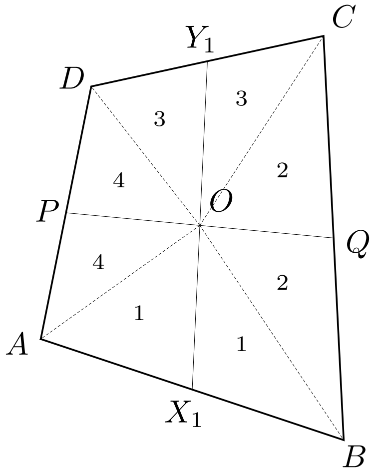
Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex (amb els vèrtexs ordenats en sentit antihorari). Dividim el costat AB en $n > 1$ parts iguals mitjançant els punts $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ (situats de $A = X_0$ a $B = X_n$, essent X_1 el més pròxim a A) i dividim el costat CD en n parts iguals mitjançant els punts $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ (situats de $D = Y_0$ a $C = Y_n$, essent Y_1 el més pròxim a D).
Considerem els segments X_iY_i i el segment PQ, on P és el punt mitjà del segment AD i Q és el punt mitjà del segment BC. Denotem Z_i el punt d'intersecció de PQ amb X_iY_i, $i = 1, \ldots, n-1$, amb $P = Z_0$ i $Q = Z_n$.
Considerem els $2n$ quadrilàters

$$X_iX_{i+1}Z_{i+1}Z_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$Z_iZ_{i+1}Y_{i+1}Y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Demostreu que la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs A i C és igual a la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs B i D.

Solució.



Considerem primer el cas $n = 2$. Els triangles AOX_1 i X_1OB tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base i la mateixa altura ($AX_1 = X_1B$). Són els dos triangles marcats amb un 1. Anàlogament, són iguals les àrees marcades amb 2, les marcades amb 3 i les marcades amb 4. Per tant, $[POY_1D] + [OX_1BQ] = [AX_1OP] + [OQCY_1] = (1) + (2) + (3) + (4) = \dfrac{[ABCD]}{2}$.
Observem també que PX_1QY_1 formen un paral·lelogram, ja que són els punts mitjans dels costats d'un quadrilàter. Les diagonals d'un paral·lellogram es tallen en el punt mitjà i O resulta el punt mitjà del segment X_1Y_1.
Pasem al cas general. Anomenem s_1, s_2, ... , s_n les àrees dels quadrilàters inferiores, i r_1, r_2, ... , r_n les dels superiors. Podem aplicar el resultat anterior (cas $n = 2$) a les àrees s_i, s_{i+1}, r_i i r_{i+1} i ens queden les igualtats

$$\begin{aligned} s_1 + r_2 &= s_2 + r_1, \\ s_2 + r_3 &= s_3 + r_2, \\ &\cdots\cdots \\ s_{n-1} + r_n &= s_n + r_{n-1} \end{aligned}$$

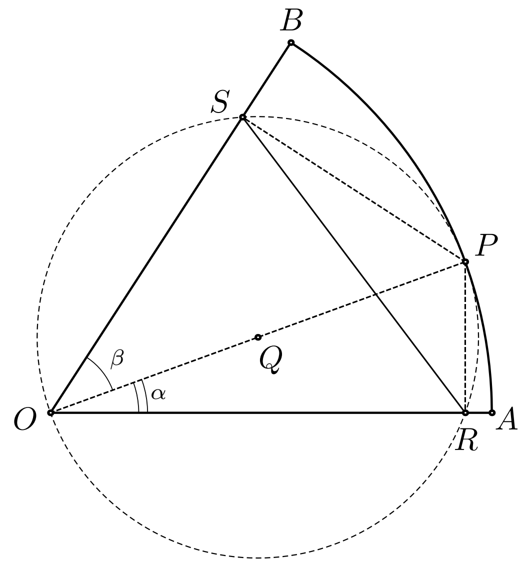
de les que es dedueix $s_1 + r_n = s_n + r_1$.

Problema 5.

Siguin OA, OB dos radis d'una circumferència de centre O. Des d'un punt P d'aquesta circumferència es tracen perpendiculars a les rectes OA i OB. Siguin R, S els peus d'aquestes perpendiculars. Demostreu que la distància RS no depèn de la posició del punt P sobre la circumferència.

Solució 1 (Geomètrica).

El quadrilàter $ORPS$ és cíclic ja que els angles en R i S són rectes. La circumferència de centre el punt mitjà Q de O i P passa pels quatre vèrtexs d'aquest quadrilàter. Aquesta circumferència té radi la meitat del de la circumferència inicial i, per tant, aquest radi no depèn del punt P.
Com que l'angle $\widehat{SOR}$ és fix i no depèn de P, resulta que RS és una corda d'una circumferència de radi fix, vista amb un angle fix. En conseqüència la longitud de la corda és també fixa i no depèn de P.



Solució 2 (Trigonomètrica).

Si suposem que $OA = OB = 1$ tenim que $OR = \cos\alpha$ i $OS = \cos\beta$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle OSR tenim

$$RS^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

Un petit càlcul demostra que l'expresió anterior és

$$\sin^2(\alpha+\beta),$$

que és constant.

Solució 3 (Analítica).

Posem $A(\cos\gamma, \sin\gamma)$, $B(\cos\delta, \sin\delta)$ i $P(\cos t, \sin t)$. Calculem els peus R i S de les perpendiculars des de P a les rectes OA i OB que tenen equacions $\sin\gamma\, x - \cos\gamma\, y = 0$ i $\sin\delta\, x - \cos\delta\, y = 0$, respectivament.

$$R\Big(\cos\gamma\cos(\gamma-t), \sin\gamma\cos(\gamma-t)\Big), \quad S\Big(\cos\delta\cos(\beta-t), \sin\delta\cos(\delta-t)\Big).$$

El quadrat de la distància entre aquests dos punt és, desprès de calcular força i substituir $\gamma-\delta = (\gamma-t)-(\delta-t)$,

$$\sin^2(\delta-\gamma),$$

que no depèn de t.

Problema 6.

Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt dels nombres enters positius n tals que

$$n \mid 2^n + 1$$

(Equivalentment, que $2^n + 1$ és múltiple de n).
a) Demostreu que per a tot nombre enter $k \geq 0$, 3^k pertany a $\mathcal{A}$.
b) Quins nombres primers pertanyen a $\mathcal{A}$?

Solució.

a) Per a $k = 0, 1$ la condició és evident. Suposem, per inducció, que

$$3^{k-1} \;\Big|\; 2^{3^{k-1}} + 1.$$

Aquesta condició equival a que, per a un cert r enter, sigui

$$2^{3^{k-1}} + 1 = r3^{k-1}, \quad \text{o bé}, \quad 2^{3^{k-1}} = r\,3^{k-1} - 1.$$

Elevant al cub aquesta última igualtat resulta

$$2^{3^k} = \left(r\,3^{k-1} - 1\right)^3 = r^3 3^{3k-3} - 3\,r^2 3^{2k-2} + 3\,r 3^{k-1} - 1 = t\,3^k - 1,$$

per a un cert enter t, ja que $3k - 3$ i $2k - 1$ són més grans o iguales que k. L'última igualtat ens diu que $3^k \;\big|\; 2^{3^k} + 1$.

b) Si es compleix $p \;\big|\; 2^p + 1$ per a p primer, és evident que p no pot ser 2. Si és senar es complirà el teorema de Fermat $p \;\big|\; 2^p - 2$, d'on, restant $2^p + 1$ i $2^p - 2$ resulta que $p \;\big|\; 3$ i això implica que $p = 3$. Trivialment, $3 \in \mathcal{A}$.