

TEMA I: Conceptes Generals d'estadística

- 1) Població i Mostra.
- 2) Variable Estadística
 - a) Variable qualitativa
 - b) Variable quantitativa: i) discreta
ii) continua.
- 3) Taula de distribució de Freqüència.
 - a) Variable discreta: i) dades agrupades
ii) dades no agrupades.
 - b) Variable continua.
- 4) Gràfiques de distribució de freqüència.
 - a) Diagrames de barres.
 - b) Histogrames.
 - c) Polígons de freqüència.
 - d) Diagrames de sector.

Tema II: Mesures de centralització

- 1) Mediana
- 2) Moda
- 3) Mitjana Aritmètica

Tema III: Paràmetres de Dispersió

- 1) Rang
- 2) Desviació mitjana
- 3) Desviació típica.
- 4) Variança.

Tema IV: Combinatoria

- 1) Permutacions i variacions ordinàries.
- 2) Permutacions i variacions amb repetició.

3) Combinacions.

Tema V: Introducció a la Probabilitat

- 1) Experiment i succés.
- 2) Espai mostral.
- 3) Àlgebra de successos.
- 4) Probabilitat.
- 5) Definició de Laplace. (Probabilitat condicionada)

Tema I: Conceptes generals d'estadística.

1) **Població i mostra.** Qualsevol investigació estadística, com saber què opinen els alumnes de primer curs de segon cicle d'ESO sobre la Reforma Educativa, va referida a un conjunt d'elements. Aquest conjunt d'elements rep el nom de població, i una part representativa de la població s'anomena mostra.

2) **Variable estadística.** S'anomenen característiques les qualitats que s'estudien dels elements d'una mostra o població, com pot ser el sexe, edat, nombre de germans, etc.

Hi ha característiques que es poden mesurar, com pot ser el pes, l'edat, l'estatura, i s'anomenen variables quantitatives. Altres característiques, com pot ser el sexe, no es poden mesurar, són qualitatives i s'anomenen variables qualitatives.

Quan les alternatives d'una característica s'expressen amb nombres es diu que s'han codificat; per exemple, les alternatives del sexe (noi, noia) es poden codificar com: noi = 0, noia = 1.

S'anomena variable estadística els valors numèrics que s'obtenen en estudiar la característica d'una població o mostra. Per exemple, quan es pregunta l'edat als alumnes d'una escola, els nombres que s'obtenen són els valors de la variable estadística.

En alguns casos, les variables només poden prendre uns valors determinats; aleshores s'anomenen variables discretes. Per exemple: el nombre de germans és una variable discreta, perquè es poden tenir 2 o 3 germans, però no 2,8.

Altres variables poden prendre qualsevol valor comprès entre cada dos consecutius; aleshores s'anomenen variables contínues. Per exemple, l'estatura és una variable contínua.

3) Taula de distribució de freqüència.

Anomenarem freqüència absoluta corresponent a la dada x_i i escriurem n_i , el nombre de vegades que apareix aquesta dada.

Anomenarem freqüència relativa corresponent a la dada x_i i escriurem $f_r(x_i)$, el quocient $\frac{n_i}{N}$, sent n_i la freqüència absoluta de x_i i N el nombre total de dades de la sèrie estadística.

Ordenada la sèrie estadística de més petit a més gran, agrupant les dades iguals, anomenarem freqüència absoluta acumulada N_i respecte de la dada x_i la suma de totes les freqüències absolutes de les dades de la sèrie des del principi fins a la x_i inclosa:

$$N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$$

Ordenada la sèrie estadística de més petit a més gran, agrupant les dades iguals, anomenarem freqüència relativa acumulada F_i respecte de la dada x_i la suma de totes les freqüències relatives de les dades de la sèrie des del principi fins a la x_i inclosa.

Per a l'estudi d'una sèrie estadística, és aconsellable distribuir-ne les dades en una taula en la qual figuri cada dada i la seva freqüència absoluta. A partir d'aquí podem ampliar la taula amb freqüències relatives, freqüències acumulades etc.

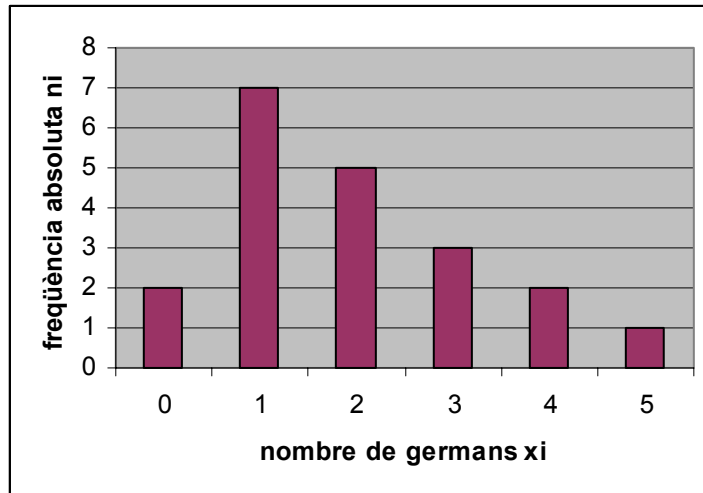
Exemple:

Als 20 alumnes de classe, el professor els ha preguntat el nombre de germans que tenen. Els resultats són aquests: 2,1,0,1,1,3,2,2,4,3,1,1,1,0,2,1,2,3,5,4

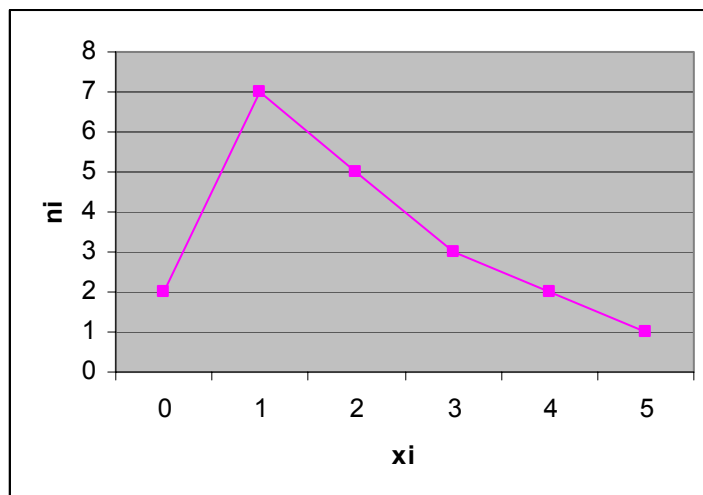
X_i	Recompte	n_i	N_i	$f_r(x_i)$	F_i
0	//	2	2	2/20	2/20
1	///// //	7	9	7/20	9/20
2	/////	5	14	5/20	14/20
3	///	3	17	3/20	17/20
4	//	2	19	2/20	19/20
5	/	1	20	1/20	20/20

4) Gràfiques de distribució de freqüència.

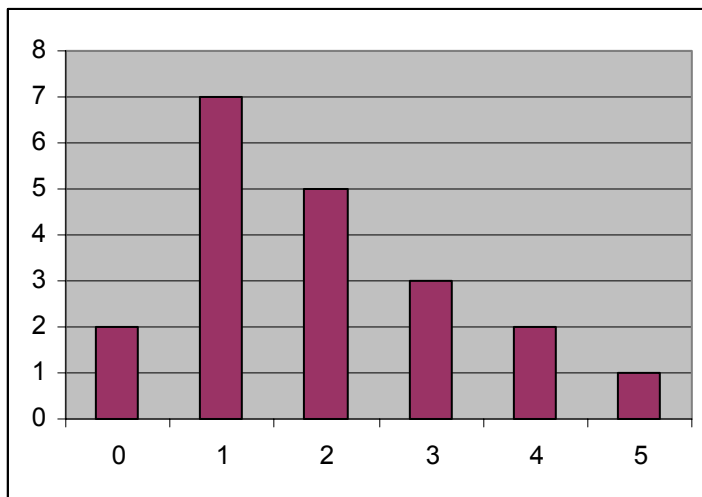
Diagrama de barres: En aquest diagrama es representen damunt l'eix de les abscisses els valors possibles de la sèrie estadística i per a cada valor alcem un segment (barra) que representa la seva freqüència absoluta o relativa.



Polígon de freqüències: Anomenarem polígon de freqüències la línia formada per la unió per segments dels extrems de les barres de distribució de la sèrie estadística.

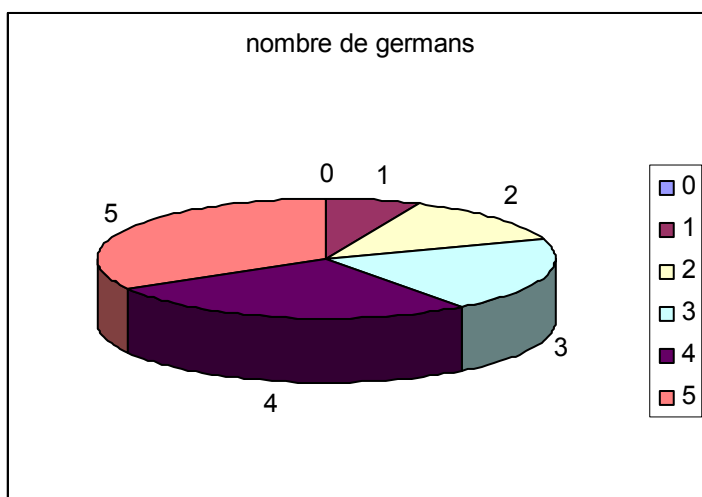


Histograma: Per a la representació gràfica de la distribució d'un sèrie estadística en la qual les dades s'han agrupat per classes, normalment s'utilitza l'histograma, format per rectangles la base dels quals és l'amplitud de la classe, i l'altura la freqüència absoluta o relativa.



Diagrames en sectors: Aquests diagrames consisteixen en un cercle en el qual dibuixarem sectors l'àrea dels quals és proporcional a la freqüència de cada dada de la sèrie estadística.

L'angle central que correspon a la dada x_i és: $\alpha = \frac{360^\circ \cdot n_i}{N}$



Tema II: Mesures de centralització.

1) Mediana.

Anomenarem mediana el nombre que, un cop ordenada la sèrie de més petit a més gran sense agrupar les dades repetides, es troba en la posició central. La representarem amb m .

En cas que la sèrie estadística tingui un nombre parell de dades, aleshores prenem com a mediana la semisuma dels valors centrals (punt mig).

2) Moda.

Anomenarem moda el valor de la sèrie estadística de major freqüència absoluta. Pot passar que aquesta sigui única o no.

3) Mitjana (mitjana aritmètica).

Si tenim una taula de freqüències absolutes de la següent forma:

Valor	Fr. Absoluta
X1	N1
X2	N2
X3	N3
...	
Xk	Nk

Anomenarem mitjana i la representarem amb $\bar{x}$ el quocient:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

Tema III: Mesures de dispersió.

Les mesures de dispersió tenen com a missió mesurar el grau de separació de les dades de la sèrie estadística.

1) Rang o recorregut.

Anomenem rang a la diferència entre el valor més gran i el més petit de la sèrie estadística.

2) Desviació mitjana

Donada una sèrie estadística de mitjana $\bar{x}$, anomenarem *desviació respecte a la seva mitjana de la dada* x_i la diferència $x_i - \bar{x}$.

Anomenarem desviació mitjana de la sèrie i la representarem amb d_m el nombre

$$d_m = \frac{(x_1 - \bar{x})n_1 + (x_2 - \bar{x})n_2 + (x_3 - \bar{x})n_3 + \dots + (x_k - \bar{x})n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

3) Variança.

Si tenim una taula de freqüències absolutes de la següent forma:

Valor	Fr. Absoluta
X_1	N_1
X_2	N_2
X_3	N_3
	
X_k	N_k

Anomenarem variança i la representarem amb v el quocient:

$$v = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + (x_3 - \bar{x})^2 n_3 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

On $\bar{x}$ és la mitjana aritmètica de la mostra.

4) Desviació típica.

Definim la desviació típica per l'arrel quadrada de la variança, i la denotarem per s .

$$s = \sqrt{v}$$

Tema IV: Combinatòria

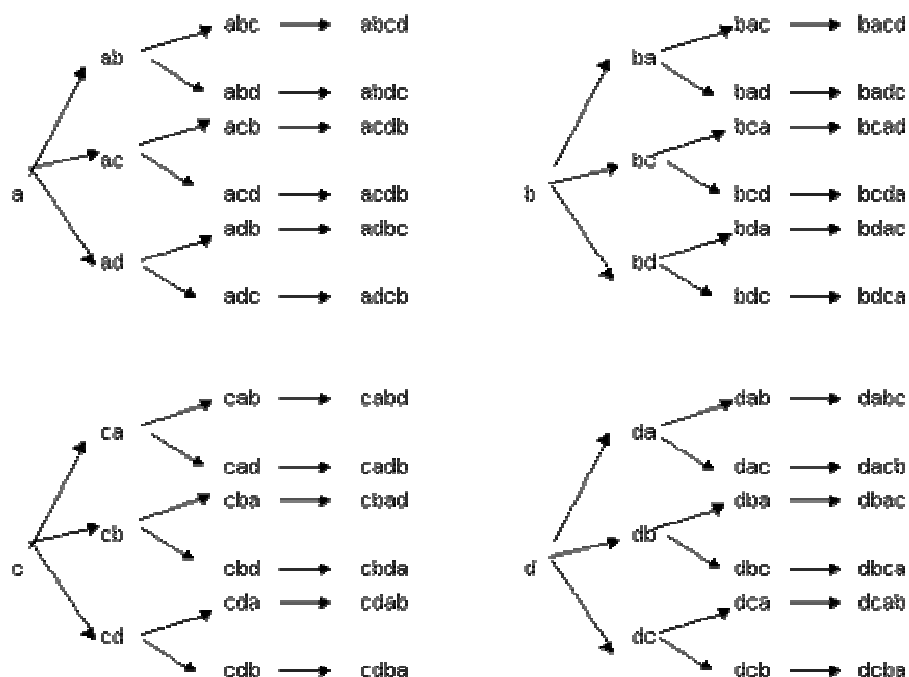
1) PERMUTACIONS I VARIACIONS ORDINÀRIES

PERMUTACIONS ORDINÀRIES

Definició: Diem permutacions ordinàries de m elements, als grups que poden formar-se amb els m elements de manera que entrin tots en cada grup i que dos grups siguin diferents perquè varia l'ordre en què estan col·locats els elements.

Exemple 1: Volem col·locar quatre llibres diferents de totes les maneres possibles en un prestatge. Els llibres els senyalem amb les lletres : $\{ a, b, c, d \}$

Per saber quines són aquestes ordenacions construirem un diagrama d'arbre:



En aquest diagrama veiem que de cada un dels 4 elements originals surten 3 fetxes i de cada una d'aquestes 2 i de cada una d'aquestes 1. Per saber el número de grups de quatre elements diferents que es poden formar amb els 4 elements originals, haurem de multiplicar: **4.3.2.1**

En general la fórmula per trobar el número de permutacions ordinàries és :

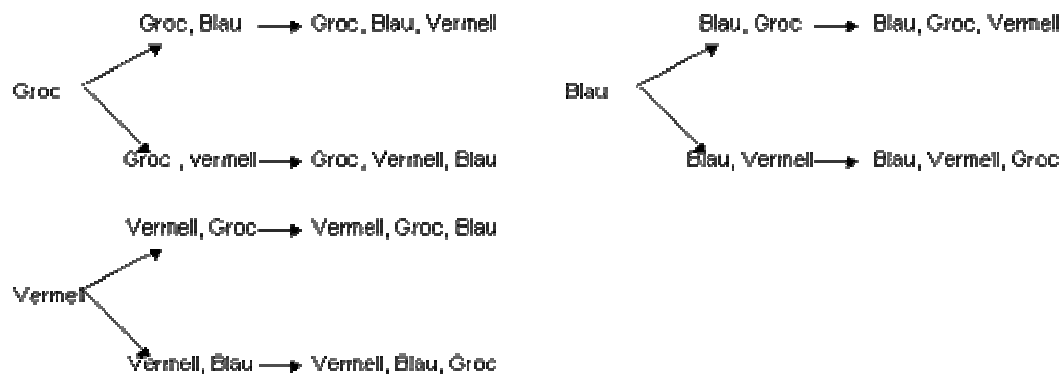
$$P_m = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots 1 = m!$$

Hi ha dues notacions per indicar les permutacions ordinàries de m elements: P_m , o , $m!$ (factorial de m)

Exemple 2: Volem saber quantes i quines banderes tricolors es poden formar amb els colors: { Groc, blau, vermell }

Per saber quantes utilitzarem la fórmula anterior: $P_3 = 3.2.1 = 6$

Per saber quines utilitzarem el diagrama d'arbre :



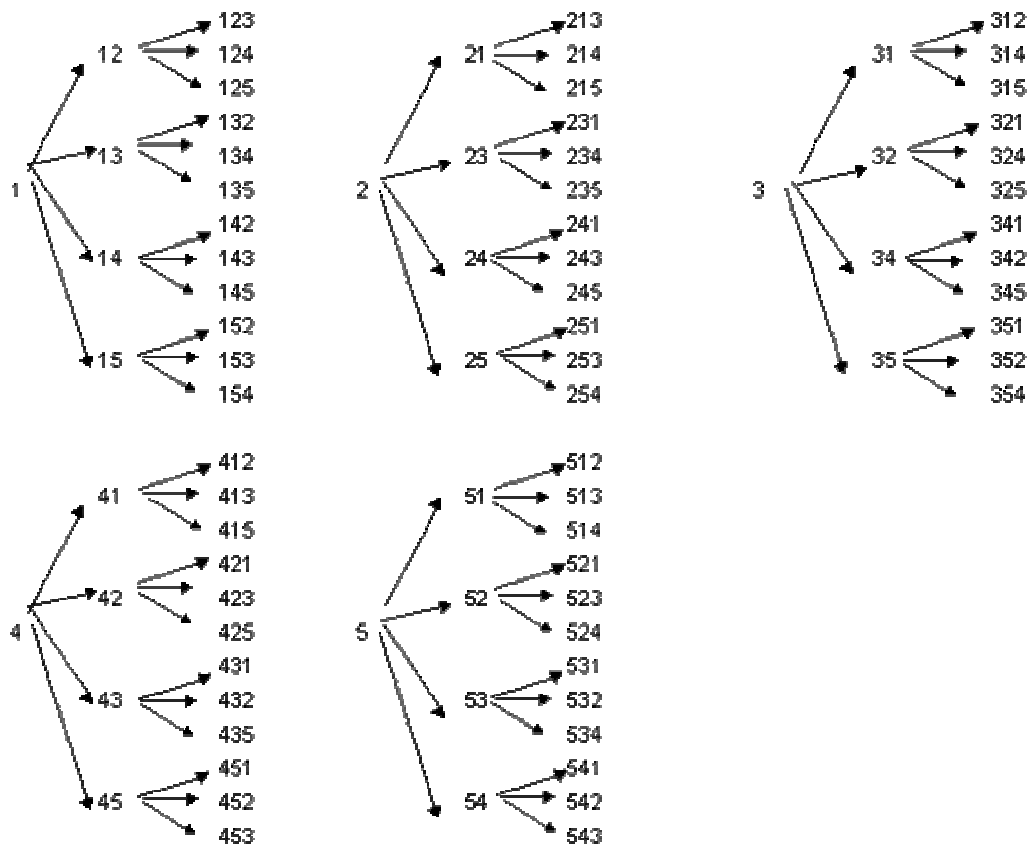
Recorda: En les Permutacions ordinàries, dos grups són diferents si els elements estan col.locats en ORDRE DIFERENT.

VARIACIONS ORDINÀRIES

Definició: Diem variacions ordinàries de m elements diferents, agafats de n en n, als grups que es poden formar de n elements diferents amb els m, de manera que dos grups siguin diferents tant si tenen algun element diferent o aquests estan colocats en ordre diferent

Exemple 1: Volem saber quants i quins grups de tres elements diferents es poden formar amb els números: {1, 2, 3, 4, 5}.

Per saber quins construirem un diagrama d'arbre:

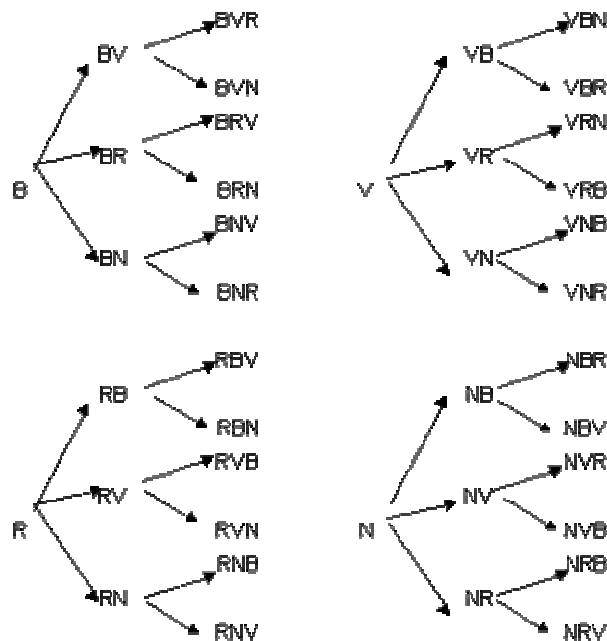


En aquest diagrama veiem que de cada un dels 5 elements originals surten 4 fetxes i de cada una d'aquestes 3. Per saber el número de grups de tres elements diferents que es poden formar amb els 5 elements originals, haurem de multiplicar: **5.4.3**

Exemple 2: Ens interessa saber quantes i quines banderes tricolors es poden formar amb els colors: { blau, verd, rosa, negre }

Per saber quantes utilitzarem la fórmula anterior: $V_{4,3} = 4.3.2 = 24$

Per saber quines utilitzarem el diagrama d'arbre :



Per utilitzar la fórmula de les variacions ordinàries en comptes de calcular $m-n+1$, per saber en quin número hem d'acabar, ens podem fixar en què sempre hi ha tants factors com ens indica el $2n$ subíndex.

Així doncs:

$$V_{5,3} = 5.4.3 ; V_{8,2} = 8.7 ; V_{7,4} = 7.6.5.4$$

En general la fórmula per trobar el número de variacions ordinàries és :

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)(m-3).....m-n+1$$

$$V_{m,n} = \frac{m!}{n!}$$

Recorda: En les variacions ordinàries, dos grups són diferents si varia l'ORDRE o LA NATURA dels elements que l'integren.

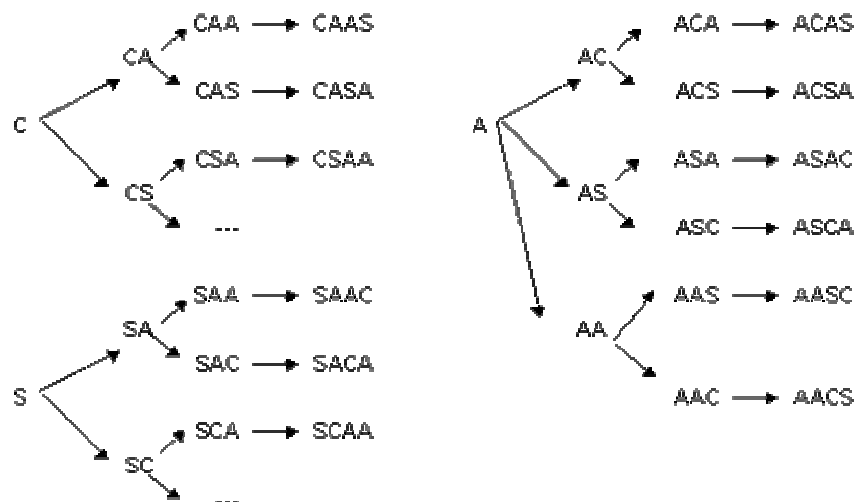
2) PERMUTACIONS I VARIACIONS AMB REPETICIÓ

PERMUTACIONS AMB REPETICIÓ

Definició: Diem permutacions amb repetició de m elements, als grups que poden formar-se amb els m elements, dels quals n'hi ha que estan repetits un cert número de vegades.

Exemple 1: Amb les lletres de la paraula "CASA".Quantes ordenacions diferents podem escriure?

Per saber quines són aquestes ordenacions construirem un diagrama d'arbre:

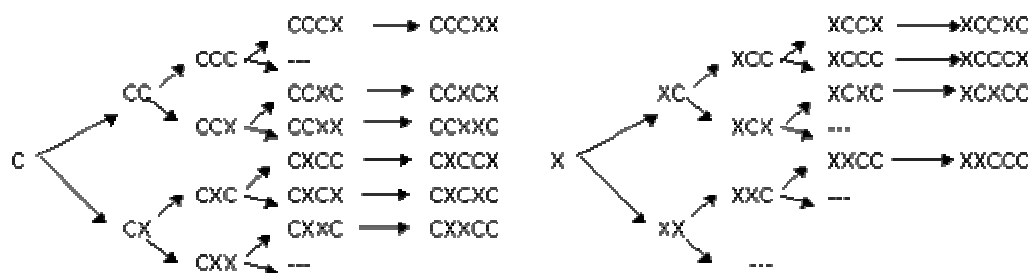


Fixem-nos que ens surten les següents possibilitats: 12

Això respon a l'expressió:

$$PR_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

Exemple 2: Volem construir el diagrama d'arbre per les ordenacions possibles amb els elements del conjunt : { C, C, C, X, X }



L'expressió que ens donaria quantes permutacions amb repetició seria:

$$PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

En general la fórmula per trobar el número de permutacions amb repetició és :

$$PR_m^{n,l,k} = \frac{m!}{n! \cdot l! \cdot k!}$$

Exemple 3: De quantes maneres pots col·locar 8 llibres en una estanteria, si tens 3 llibres repetits del "Tirant lo blanc" i dos repetits de " La plaça del Diamant"?

$$PR_8^{3,2} = \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

Recorda: En les Permutacions amb repetició, l'únic que varia d'un grup a un altre, és l'ordre dels elements i a més hi ha algun element repetit.

VARIACIONS AMB REPETICIÓ

Definició: Diem variacions amb repetició de m elements, agafats de n en n, als grups que poden formar-se amb els m elements, dels quals n'hi ha que estan repetits un cert número de vegades.

Exemple 1: Volem saber quants grups de tres elements es poden formar amb els números: {1, 2, 3, 4, 5}. Podríem fer el diagrama d'arbre i veuríem que quan he triat el número 1 per a la primera cifra el puc tornar a triar també per a la segona i per a la tercera.

Aixa doncs, el número total de grups que es poden formar s'obtindrà multiplicant $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, ja que hi ha 5 possibilitats de triar el primer nombre, per cadascuna d'aquestes n'hi ha 5 més (ja son 25) i per a cadascuna d'aquestes tenim 5 possibilitats més.

Escrivem: $VR_{5,3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

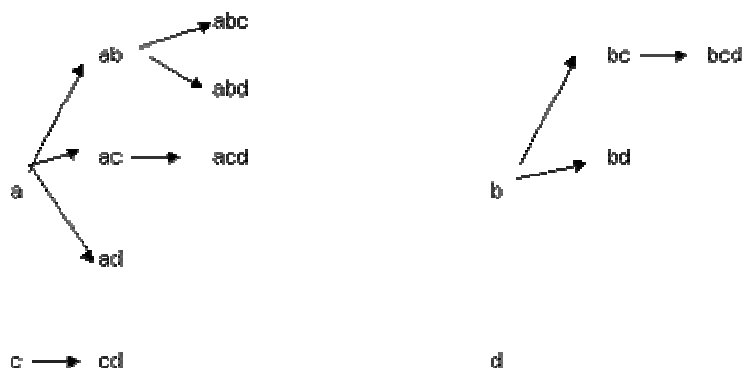
I en general: $VR_{m,n} = m^n$

3) COMBINACIONS ORDINÀRIES

Definició: Diem combinacions ordinàries de m elements agafats de n en n, als grups que es poden formar de n elements amb els m, de manera que dos grups siguin diferents si varia la natura d'algun dels seus elements.

Exemple 1: Amb els elements del conjunt: {a, b, c, d} Quants i quins grups de 3 elements puc formar, de manera que l'únic que influeixi sigui la natura dels elements?

Per saber quins construirem un diagrama d'arbre:



Per saber quants grups utilitzem la fórmula de les combinacions ordinàries.

$$C_{4,3} = \frac{V_{4,3}}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

(Combinacions de 4 elements agafats de 3 en 3, s'obtenen dividint el número de variacions ordinàries pel número de permutacions).

En general la fórmula de les combinacions ordinàries és

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Hi ha una altra notació per a les combinacions :

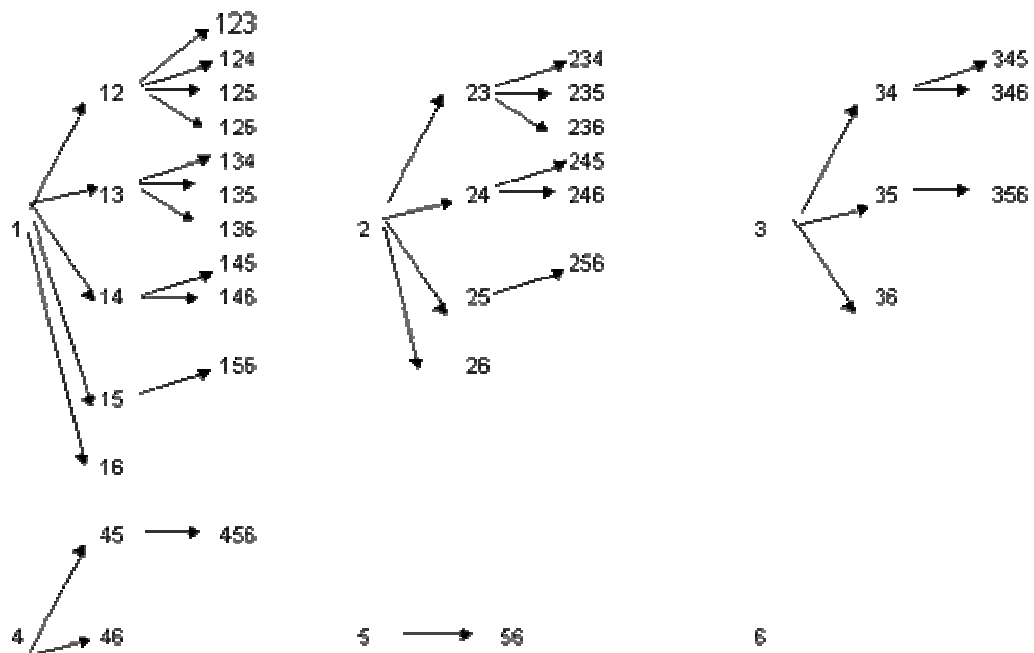
$$C_{m,n} = \binom{m}{n}$$

Aquesta notació rep el nom de número combinatori

Exemple 2: Una oficina disposa de 3 llocs de treball iguals que pot cobrir amb 6 persones. De quantes i quines maneres pot omplir-los si numerem les persones de l'1 al 6?

Per saber quantes utilitzarem la fórmula anterior: $C_{6,3} = 20$

Per saber quines utilitzarem el diagrama d'arbre :



Exemple 3: Quants grups diferents de 4 estudiants cada un poden formar-se amb els 8 estudiants d'una classe ?

Com que ens diuen només quants grups hem d'utilitzar la fórmula: $C_{8,4}=70$

Exemple 4: Quantes Lottos 6/49 hauríem de fer per encertar segur la combinació guanyadora ?



Dels 49 números n'hem de triar 6, però l'ordre en què els agafem no importa, només la natura dels nombres escollits. Per tant :

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

Aquestes són les lottos que hauríem de fer per encertar-ho segur. Aquest número multiplicat pel que val cada aposta ens donarien els diners que hauríem d'invertir. Fixeu-vos que no surt a compte.

Recorda: En les combinacions ordinàries, dos grups són diferents si varia LA NATURA dels elements que l'integren. No importa l'ordre en que estiguin els elements dins del grup.

Quadre Resum:

