

Equacions exponencials i les progressions geomètriques. Mantenim un secret?

Un espia descobreix un secret a les 8 del matí. Un quart d'hora més tard (8h 15'), transmet el secret a tres persones, amb la condició que no ho han de dir a ningú que no sigui estrictament de confiança.

A dos quarts de 9 del matí (8h 30'), cadascuna d'aquestes tres persones ho ha dit a altres tres en les mateixes condicions. A tres quarts de 9 del matí (8h 45'), cadascuna de les anteriors persones, a tres més (és a dir, a 27).

Suposem que aquesta situació es repeteix cada quinze minuts, de manera que no hi ha encreuaments (és a dir, que els que reben el missatge no l'han rebut anteriorment).

En quin moment ho sabrà tot Catalunya? I tot el món? Té sentit preguntar quanta gent diferent ho sabrà a les 6 de la tarda?

Hora	Persones que saben el secret
8 matí	1
8h 15'	1+3=4
8h 30'	1+3+3 ² = 13
8h 45'	1+3+3 ² +3 ³ = 40

Observeu que estem davant d'un creixement «exponencial», de manera que al cap de n períodes de 15 minuts ho sabran:

$$1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n.$$

Aquesta suma -és la suma d'una progressió geomètrica de raó 3- es pot escriure com:

$$1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = (3^{n+1} - 1) / (3 - 1) = (3^{n+1} - 1) / 2 \text{ persones}$$

Si el gener de 2009 Catalunya té censats uns 7.000.000 d'habitants, tindrem que $(3^{n+1} - 1) / 2 = 7.000.000$ i, per tant, $n = 13,9$. Es a dir, uns « 14 intervals de 15 minuts », que equivalen a 3 hores i 30'. En conseqüència, a les 11h 30' ho sabrà tot Catalunya.

I tot el món?

El gener de 2009, es calcula que el planeta Terra té 6.790.062.216 d'habitants. Efectuant els mateixos càlculs anteriors, tenim que n és aproximadament, 2 i, per tant, estem parlant de 5h 30'; en síntesi, tot el món sabrà el secret a les 13h 30'.

Veiem que no té cap sentit preguntar quanta gent diferent ho sabrà a les 6 de la tarda, ja que serà el mateix número de gent que ho sabrà a les 13h 30' del migdia.